Workshop Trickle groups
27/06/25

Sous-groupes paraboliques des Trickle groups.

I. Cas général
II. Cas (pré) Garside.

I. Cas général.

On fixe par défaut $(\Gamma, \leq, \mu, (\varphi_x))$ un graphe de Trickle.

1) Définition

Si $X \subseteq V(\Gamma)$, on peut considérer le sous groupe de $Tr(\Gamma)$ engendré par X, en espérant que ce soit à son tour un graphe de Trickle.

1) Il faut "saturer" X : Si $x < y$ sont des éléments de X, alors on a $\varphi_y(x) = yxy^{-1}$ dans $Tr(\Gamma)$, donc $\varphi_y(x)$ appartient au sous groupe de $Tr(\Gamma)$ engendré par X.

2) On veut que la "présentation de Trickle" des sous-groupe s'obtienne en restreignant la présentation de $Tr(\Gamma)$. On veut avoir X à un sous graphe <u>plein</u> de Γ.

Déf : Un sous graphe plein Γ_1 de Γ est dit parabolique si pour tout $x \in V(\Gamma_1)$, φ_x stabilise $Star_x(\Gamma_1)$ globalement.

Ex: Dans  où φ_e : $(cd)(ba)$

 n'est pas possible.

<u>Lemme</u> : Soit $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ un sous graphe parabolique. $\leq_1$, μ_1 les restrictions de $\leq_1$, μ_1 à Γ_1.

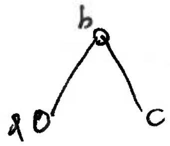
(a) $(\Gamma_1, \leq_1, \mu_1, \varphi_{x|\mathrm{Star}(\Gamma_1)})$ est un graphe de Trickle.

(b) L'application $V(\Gamma_1) \to V(\Gamma)$ induit un morphisme $T\Omega(\Gamma_1) \to T\Omega(\Gamma)$ dont l'image est le sous groupe de $T\Omega(\Gamma)$ engendré par $V(\Gamma_1)$

<u>Rq</u> : la condition (e) que l'ordre de $\varphi_{x|\mathrm{Star}_x(\Gamma_1)}$ divise $\mu(x)$ vient car l'ordre de $\varphi_{x|\mathrm{Star}\,\Gamma_1}$ divise celui de φ_x, justement car $\mathrm{Star}_x(\Gamma_1)$ est laissé stable.

2) Exemples

- Les singletons dans $V(\Gamma)$ donnent toujours des paraboliques : des groupes cycliques.

- 

où $\varphi_b : a \mapsto c$, on a $\{1\}$ + a∘ ∘c + Γ.

Donc dans $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, et $T\Omega(\Gamma)$ comme "sous groupes paraboliques standards".

- Si $\leq$ est trivial, alors les φ_x sont tous triviaux et on a un produit graphé de groupes cycliques. Un parabolique est alors engendré par une sous famille arbitraire + leurs relations de commutation éventuelle.
  ↳ Dans le cas d'un RAAG, on retrouve la notion de parabolique standard.

- Si $X \subseteq V(\Gamma)$ est formé d'éléments incomparables, alors le sous graphe associé est parabolique, et le sous groupe associé est un produit graphé à l'intérieur de notre Trickle group.

- Si $X \subseteq V(\Gamma)$, prendre Γ_1 engendré par $\{y \in V(\Gamma) \mid \exists x \in X, y \leq x\}$ donne un sous graphe parabolique.

↳ exemple du groupe de Thompson F : Pour $\{x\} = X \in V(\Gamma)$, la partie $\{y \in V(\Gamma) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cup \infty \mid y \leq x\}$ donne un sous graphe parabolique dont le sous groupe <u>associé est isomorphe à F</u>

3) <u>Plongement.</u>

<u>Theo 2.10</u> : Soit Γ_1 sous graphe parabolique.

(a) Le morphisme $T\pi(\Gamma_1) \to T\pi(\Gamma)$ est injectif.

(b). Pour $g \in T\pi(\Gamma)$, on a $g \in T\pi(\Gamma_1)$ ssi les termes de sa forme normale (au sens de l'algo de Tricke) sont dans $T\pi(\Gamma_1)$. Auquel cas les formes normales dans $T\pi(\Gamma)$ et $T\pi(\Gamma_1)$ coïncident.

<u>dem</u> : On rappelle $S(\Gamma_1) \subseteq S(\Gamma)$, donc $\Omega(\Gamma_1) \subseteq \Omega(\Gamma)$. On fixe $\sqsubseteq$ un ordre total sur $V(\Gamma)$ qui raffine $\leq$. La restriction de $\sqsubseteq$ à $V(\Gamma_1)$ raffine $\leq_1$.

On note R_1 le syst. de reecriture sur $\Omega(\Gamma_1)^*$, et R celui sur $\Omega(\Gamma)$.

Soit $V U \in \Omega(\Gamma_1)^*$. Pour $x^a \in U$, on a $\gamma(U, x^a) \in \Omega(\Gamma_1)$ et $L(U, x^a) \in \Omega(\Gamma_1)$, de plus si $y^a = \gamma(U, x^a)$ peut être ajouté à V (par R_1 ou R c'est pareil) alors $R(V, y^a) \in \Omega(\Gamma_1)^*$. Autrement dit :

Si $W \in \Omega(\Gamma_1)^*$ et $W' \in \Omega(\Gamma)^*$ sont tels que $W \xrightarrow{R*} W'$, alors $W' \in \Omega(\Gamma_1)^*$ et $W \xrightarrow{R_1 *} W'$.

↳ Le mot R-irred associé à W dans $\Omega(\Gamma)$ est en fait le mot R_1 irred associé à W dans $\Omega(\Gamma_1)$. □

Cor : Si Γ_1, Γ_2 sont deux sous graphes paraboliques, alors $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ également et $T_\Gamma(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = T_\Gamma(\Gamma_1) \cap T_\Gamma(\Gamma_2)$: Les sous groupes paraboliques standards sont stables par intersection

Q : Quid des paraboliques tout court ?
↳ vrai dans les RAAGS + RACGS (Coxeter en general)
↳ vrai dans les groupes de Dyer ...

II. Cas Garside. 1) Pre Garside

On suppose maintenant que $\mu(x) = +\infty \ \forall x$, et donc que $T_\Gamma(\Gamma)$ est de pré-Garside. On pose $T_\Gamma^+(\Gamma)$ le monoïde associé.

Def : Soit M un monoïde de pré garside. Un sous monoïde $N \subseteq M$ est dit parabolique si
- N est stable par diviseur : $ab \in N \Rightarrow a \in N, b \in N$.
- N est stable par ppcm conditionnel. ($a \vee b$ existe $\Rightarrow a \vee b \in N$ pour $a, b \in N$)

Prop : (7.8) Les sous monoïdes paraboliques de $T_\Gamma^+(\Gamma)$ sont exactement les $T_\Gamma^+(\Gamma_1)$, où Γ_1 est un sous graphe parabolique de Γ.

preuve longue et technique utilise les formes normales, $\subseteq$ est relativement facile.

Cor : Dans le cas des monoïdes de tricble pregarside.
- L'inclusion d'un monoïde parabolique induit une inclusion au niveau des groupes.
- Les elements positifs d'un sous groupe parabolique std sont les elements positifs de ce parabolique
- L'intersection de paraboliques standards est parabolique standard

2) Garside

On suppose maintenant Γ fini et complet. Donc $(Tr(\Gamma), Tr^+(\Gamma), \Delta)$ est de Garside avec $\Delta = x_1 \dots x_n$ (produit des generateurs dans un ordre total qui raffine $\leq$).

Lemme : Soit Γ de Garside. Les sous monoides paraboliques de Γ sont exactement les $\Gamma_\delta = \langle Div(\delta)\rangle^+$ où δ est un element de Garside parabolique : δ divise Δ ; $s, t \in Div(\delta)$, si $st \in Div(\Delta)$, alors $st \in Div(\delta)$

Si $I \subseteq [1,n]$ est tel que $V(\Gamma_1) = \{x_i \mid i \in I\}$, alors $\Delta = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ est notre element de Garside.

Comme les paraboliques standards sont stables par intersection, alors pour $g \in Tr(\Gamma)$, on peut poser
$$SPC(g) = \bigcap_{g \in Tr(\Gamma_1)/\text{para std}} Tr(\Gamma_1).$$

Conj (preservation du support) pour $x, y \in Tr^+(\Gamma)$, $\alpha \in Tr^+(\Gamma)$, si $x^\alpha = y$, alors
$$SPC(x)^\alpha = SPC(y)$$

Thèo : (Gonzalez Meneses Marin 22)
Si la preservation du support est vraie, alors une intersection arbitraire de paraboliques de $Tr(\Gamma)$ est encore parabolique

* Demontrer la conjecture
* Etendre le resultat au pré Garside (!!!)
* Induire le tout aux trickles arbitraires.