13/12/24
Séminaire SPACE
Tours

Des partitions non-croisées à l'étude des sous groupes paraboliques des groupes de tresses complexes.

I. Partitions non croisées.

II. Groupes de reflexions complexes (bien engendrés) et monoïdes duaux

III. Sous groupes paraboliques.

I) Partitions non croisée.

- Une partition d'un ensemble X est une famille $P=(u)_{u\in P}\in \mathcal{P}(X)\setminus\emptyset$ telle que $\bigsqcup_{u\in P} u = X$. On pose $Pa(X)$ l'ensemble des partitions de X.

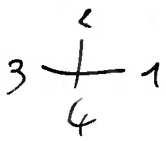
- L'ensemble $Pa(X)$ est ordonné par raffinement
$$P\leq Q \iff \forall u\in P, \exists v\in Q \quad u\subset v$$
"Ses parties de Q sont des réunions de parties de P".

- Partition = relation d'équivalence ($x\sim y \iff x, y$ sont dans la même partie).

Prop : $(Pa(X),\leq)$ est un treillis : pour $P,Q\in Pa(X)$, l'ensemble $\{P,Q\}$ admet
- un sup $P\tilde{\vee} Q$ (la "relation d'équivalence engendrée par P et Q")
- un inf $P\wedge Q$ (parties = intersection non vide d'une partie de P et d'une partie de Q).

Kreweras 72 À partir d'ici, $X\subseteq\mathbb{C}$.

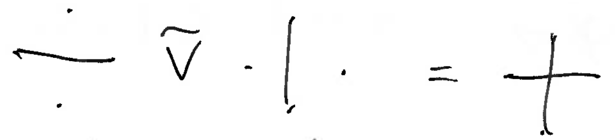
Déf : Une partition $P\in Pa(X)$ est non croisée si $\forall u,v\in P$, on a
$$\mathrm{Conv}(u)\cap\mathrm{Conv}(v)\neq\emptyset \implies u=v.$$
On pose $NCP(X)$ l'ensemble des partitions non croisées

Ex : $X=\mu_4$ 

est une partition croisée

Pour $P,Q \in NCP(X)$, $P \wedge Q \in NCP(X)$, mais $P \tilde{\vee} Q \notin NCP(X)$ a priori.

Ex :



En revanche, on peut poser

$$P \vee Q = \bigwedge_{\substack{R \in NCP(X) \\ P,Q \leq R}} R \in NCP(X)$$

Lemme : Pour $P,Q \in NCP(X)$, $P \vee Q$ est un sup de P,Q dans $(NCP(X), \leq)$

L'ensemble $NCP(X)$ est donc un treillis, sous-poset de $P_a(X)$, mais pas un sous treillis

Prop : Si $X = \mu_n$ (ou plus généralement les sommets d'un n-gone nondégénéré)

alors $|NCP(X)| = Cat_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $\quad Z_{NCP(X)}(T) = \prod_{i=2}^{n+1} \frac{i + (n+1)(T-1)}{i}$

(nb chaînes $s_1 \leq \dots \leq s_{T-1}$).

2) Complément de Kreweras

$X = \mu_n \quad n \geq 3$

Pour $x,y \in \mu_n$, on pose $]x,y[= \{ z \in \mu_n \mid y \neq z$ et (x,y,z) est dans l'ordre antihoraire$\}$

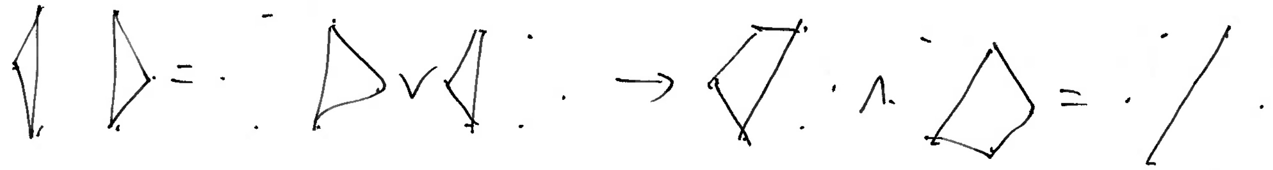
Def : Soit $P \in NCP(X)$ ayant une unique partie non singleton $a = \{\underbrace{x_1 \dots x_k}_{\text{ordre trigonométrique}}\}$.

On pose $\overline{P} \in NCP(X)$ la partition dont les parties sont

$]x_1, x_2[,\ ]x_2, x_3[\ \dots \ ]x_k, x_1[$

pour les autres cas, on utilise la règle $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Exemple :



Prop : $s \mapsto \bar{s}$ est un antiautomorphisme. $s \leq s' \Leftrightarrow \bar{s}' \leq \bar{s}$. $+ \ \bar{\bar{s}} = \zeta_n^{-1} s$.

du complément on déduit un "produit partiel"

$\forall s,t \in NCP(X)$, $s \circ t$ est défini si $t \leq \bar{s}$, auquel cas $s \circ t := s \vee t$.

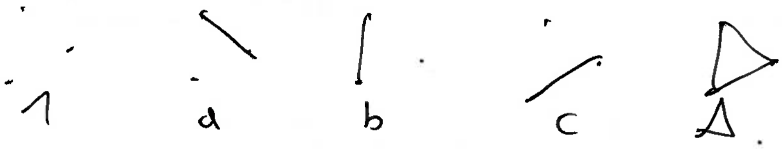
du produit partiel on définit un monoïde.

$$M = \langle NPC(X) \mid st = u \text{ si } s\circ t = u \rangle^+$$
$$= \{\text{mots en } NPC(X)\} / \{\equiv \text{ induite par les relations}\}.$$

du monoïde on déduit un groupe

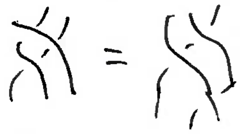
$$G = G(M) = \langle NPC(X) \sqcup NPC(X)^{-1} \mid \text{relations} + xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \rangle.$$

Ex: $X = \mu_3$.



$$M = \langle a\, b\, c\, \Delta \mid ab = bc = ca = \Delta \rangle^+$$

$$G(M) = \langle abc \mid ab = bc = ca \rangle = \langle a,b \mid aba = bab \rangle$$ le groupe de tresses à 3 brins



Birman Ko Lee 98 ?

Théo: (Bessis Digne Michel 02) Si $X = \mu_n$, $G(M)$ est le groupe de tresses à n brins.

3) Incursion du groupe symétrique.

On considère $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}([\![0,n-1]\!]) \simeq \mathfrak{S}(\mu_n)$. On a alors une application $\mathfrak{S}_n \xrightarrow{f} \mathcal{P}a(\mu_n)$ envoyant σ sur l'ensemble de ses orbites.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\ell(\sigma)$ est la longueur minimale d'un produit de transpositions exprimant σ.

On munit $\mathfrak{S}_n$ d'un ordre via $\sigma \leq \tau \Leftrightarrow \ell(\sigma) + \ell(\sigma^{-1}\tau) = \ell(\tau)$.

On pose $c = (0 \cdots n-1)$, $(\ell(c) = n)$ et $I(c) = \{\sigma \mid \sigma \leq c\} \subset \mathfrak{S}_n$.

Théo (Bessis Digne Michel 02)
La restriction de f à $I(c)$ induit un isomorphisme $(I(c), \leq) \simeq (NCP(\mu_n), \leq)$.
De plus, on a $f(\sigma^{-1}c) = \overline{f(\sigma)}$.

$\rightarrow$ en particulier, $(I(c), \leq)$ est un treillis.

Comment généraliser ?

II. Groupes de réflexions complexes (bien-engendrés) et monoïdes duaux

1) Groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. $r \in GL(V)$ est une réflexion si $\mathrm{ordre}(r) < \infty$ et $\mathrm{codim}\, \mathrm{Ker}(r-1) = 1$.

Déf : $W \subseteq GL(V)$ est un groupe de réflexions complexe s'il est fini et engendré par des réflexions. On pose $V^W = \{v \in V \mid w.v = v \ \forall w \in W\}$.
W est bien engendré s'il peut être engendré par $\mathrm{codim}(V^W)$ réflexions.

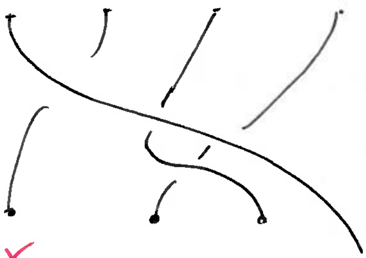
Ex :
- $\mathfrak{S}_n \to$ matrices de permutation ($\dim V = n$, $n-1$ réflexions).
- groupe diédral $s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix}$. ($\dim V = 2$, 2 réflexions).
- $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ($\dim V = 2$, 3 réflexions).

On pose $X = V - \{\text{hyperplans associés aux réflexions de } W\}$.

Déf : $B(W) := \pi_1(X/W)$ le groupe de tresses de W.

$X(\mathfrak{S}_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$.

$X(\mathfrak{S}_n)/\mathfrak{S}_n = \{\text{ensembles de } n \text{ points dans } \mathbb{C}\}$.



Une tresse !

Déf : $w \in W$ est régulier s'il a un vecteur propre dans X.
- Un élément de Coxeter est un élément régulier d'ordre maximal

Dans $\mathfrak{S}_n$, $(1 \cdots n) \to (\zeta_n^{n-1}, \dots, 1)$ est un vecteur propre.

Tous les éléments de Coxeter sont conjugués dans W.

2) Monoïde dual

On fixe W bien engendré, et $T = \{\text{réflexions de } W\}$.

Pour $w \in W$, on pose $\ell_T(w)$ = longueur minimale d'un mot en T exprimant w.

$$u \le v \iff \ell_T(u) + \ell_T(u^{-1}v) = \ell_T(v).$$

Pour $c \in W$ un élément de Coxeter, $I(c) = \{w \mid w \le c\}$. (On a $\ell(c) = \mathrm{codim}(V^W)$).

On munit $I(c)$ d'un produit partiel par

$$s \cdot t = u \quad \text{si} \quad st = u \ \text{et} \ \ell_T(s) + \ell_T(t) = \ell_T(u)$$

Déf : Monoïde dual $M(W)$ est le monoïde défini par ce produit partiel
groupe dual $G(W)$ — groupe

ça ne dépend pas du choix de c à isomorphisme près.

Théo : (Brady Watt 05, Bessis 02, 15, Bessis Corran 04) Si W est bien engendré, et $c \in V$ est Coxeter, alors $I(c)$ est un treillis, $M(W)$ est un monoïde de Garside, et $G(W) \simeq B(W)$

+G24
Pour isodiscri.

B) Partitions non croisées généralisées.

Forts de cette idée, on pose $NCP(W) := I(c)$.

Prop : $Cat(W) := |NCP(W)| = \prod_{i=1}^{m} \frac{d_i + d_n}{d_i}$, où $d_1 \dots d_n$ sont les "degrés" de W.

Reiner

Prop : (Brady Watt 01). $NCP(G(2,1,m)) \simeq \{P \in NCP(\mu_{2m}) \mid -P = P\}$. (avec ordre restreint).

Prop : (G.23). $NCP(G(d,1,m)) \simeq \{P \in NCP(\mu_{dm}) \mid \zeta_d P = P\}$ ($\simeq NCP(2,1,m)$)
$d > 1$

Bessis.

Prop : (Bessis Corran 04) $NCP(G(e,e,m)) \simeq \left\{P \in NCP(\mu_{e(m-1)} \cup \{0\}) \;\middle|\; \begin{array}{l} P \setminus 0 \in NCP(\mu_{e(m-1)}) \\ \zeta_e (P \setminus 0) = P \setminus 0 \end{array}\right\}$

$\simeq \{P \in NCP(\mu_{e(m-1)} \cup \{0\}) \mid P \setminus 0 \in NCP(G(e,e,m-1))\}$.

III. Sous groupes paraboliques.

1) Définitions

Pour $s \in NCP(W)$, on pose $Div(s) := \{r \mid r \leq s\}$. $M(W)_s = \langle Div(s) \rangle^+$ $G(W)_s = \langle Div(s) \rangle$.

Def : Les groupes de la forme $G(W)_s$ sont les sous groupes paraboliques standards.
Les sous groupes paraboliques sont les conjugués des sous groupes paraboliques standards

Prop : L'image de $G(W)_s$ dans W est $W_0 = \{w \mid \forall v \in Ker(s-1), w.v = v\}$, un sous groupe parabolique, et on a $G(W)_s \simeq G(W_0)$

ex : Dans $NCP(\mu_8)$. $s =$  $\to$ un pentagone et un carré $\to NCP(\mu_5) \times NCP(\mu_3)$.

$G(G_8)_s \simeq G(G_5) \times G(G_3)$.

2) Intersections, conjugants positifs minimaux.

Théo (Gonzalez Meneses Marin 22, G24)
Quel que soit W, les sous groupes paraboliques topologiques de $B(W)$ sont stables par intersection.

Methode

- identifier les paraboliques topologiques et ceux issus d'une structure de Garside
  (structure différente pour Gonzalez Meneses, Marin. Monoide dual pour nous). ??
- Montrer que $\forall x \in G(W)$, $\exists$ $PC(x)$ parabolique minimal pour $\subseteq$ contenant x.
- Par un argument général en deduire le theorème sur l'intersection

Pour montrer que les clôtures paraboliques existent, il suffit de montrer la propriété de preservation du support.

Lemme : $G(W)_s \cap G(W)_t = G(W)_{(s \wedge t)}$: les paraboliques standards sont stables par intersection.

On peut donc definir $SPC(x)$ la clotûre parabolique standard, et conjecturer que pour de bons x (eg $x \in M(W)$), $SPC(x) = PC(x)$.

Def : On dit que $(G(W), M(W))$ preserve le support si $\forall x \in M(W)$, $\alpha \in G(W)$ tel que $\alpha^{-1} x \alpha \in M(W)$, on a $\alpha^{-1} SPC(x) \alpha = SPC(\alpha^{-1} x \alpha)$.

Theo (Gonzalez Meneses Marin 22) Si on a preservation du support, alors les clotûres paraboliques existent.

Prop : Pour x fixé, il suffit de tester la propriété de preservation du support pour un conjuguant positif minimal : $\alpha \in M(W)$ tel que $\alpha^{-1} x \alpha \in M(W)$ et aucun diviseur strict de α ne respecte cette propriété

Theo (G24) Soit x avec $SPC(x) = G(W)_s$. Si α est un conjuguant positif minimal de x, alors soit

- $\alpha \leq \bar{s}$, α est un conjuguant positif minimal de s. $SPC(x)^\alpha = G(W)_{s^\alpha} = SPC(x^\alpha)$.
- $\alpha \leq s$, $\alpha \in G(W)_s$ et $SPC(x) = SPC(x^\alpha)$

En particulier, $(G(W), M(W))$ preserve le support

La preuve est au cas par cas et repose sur un grand lemme technique

"Lemme" : $\forall s \in NCP(W)$, $\exists$ $A(\bar{s}) = R_0(s) \subseteq \ldots \subseteq R_k(s) = A \setminus A(s)$

$\forall a \in R_i(s)$, $b \leq s$, on a ba simple ou $\exists d \in R_{i-1}(s)$ $bd \leq b \vee a$.