Séminaire Topologie
Labo. P.P
09/02/24.

Description de l'espace des orbites régulières d'un groupe de réflexions complexes.

I Groupes de réflexions complexes
II. Description de X/W via le morphisme de Lyashko-Looijenga

I). Groupes de Réflexions complexes

1) Définitions

On fixe V un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n < \infty$.

Déf: • $s \in GL(V)$ reflexion = ordre fini + codim $\underbrace{\ker(s-1)}_{H_s} = 1$

• $W \subseteq GL(V)$ un Groupe de Reflexions Complexes si il est fini et engendré par des réflexions

Ex: $s = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, $H_s = \{x = iy\}$.

• $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle =: W$ est un GRC d'ordre 16.

• $\mathfrak{S}_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ via les matrices de permutation.

$$GL_n(\mathbb{Q}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$$

Weyl $\qquad$ Coxeter $\qquad$ Complexes. GRC.

Déf: $W \in GL(V)$ est irreductible si $W \hookrightarrow GL(V)$ est une représentation irreductible de W.

Maschke $\longrightarrow$. On peut toujours se ramener au cas irreductible

Ex : Pour $\mathfrak{S}_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$, $D : \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ est une droite invariante.
$\mathfrak{S}_n \subseteq GL(\mathbb{C}^n/D)$ est un groupe de réflexions irréductible $(\sim A_{n-1})$.

Thm : (Shephard-Todd 54)
Tout GRC irréductible est soit
- Un $G(m,p,n)$ → "matrices monomiales $n\times n$ à coefficients non nul dans μ_m et dont le produit des coefficients est dans $\mu_{m/p}$."

$\left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right\rangle = G(4,2,2)$

- Une des 34 exceptions $G_4, \dots, G_{37}$

2) Un peu de géométrie.

$W \curvearrowright V \leadsto W \curvearrowright V^*$ (action contragrédiente), aussi un GRC.

Algébriquement. $\mathbb{C}[V] = S(V^*)$ (algèbre symétrique).
$\mathbb{C}[V/W] \simeq S(V^*)^W$.

Théo : (Shephard Todd 54 ; Chevalley 55)
$W \leq GL(V)$ est un GRC $\Leftrightarrow$ il existe $f_1, \dots, f_n \in S(V)$ homogènes et tels que
$S(V) = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$.

Les degrés $d_1, \dots, d_n$ ne dépendent que de W (à reordonnancement près) et $|W| = d_1 \dots d_n$. Système d'invariants fondamentaux.

En pratique, on a une f° continue $\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ v & \longmapsto & f_i(v) \end{array}$ qui induit un homéo $V/W \simeq \mathbb{C}^n$.

Ex: $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & ((xy)^2, x^4+y^4) \end{array}$ induit un homéo $\mathbb{C}^2/G(4,2,2) \simeq \mathbb{C}^2$.

· Pour $s \in Ref(W)$, on pose $H_s = Ker(s-1)$, et $\mathcal{A} = \{H_s \mid s \in Ref(W)\}$.

· Pour $H \in \mathcal{A}$, $\{w \in W \mid w.h = h \; \forall h \in H\} = \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}/e_H\mathbb{Z}$

(si $W \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ $e_H = 2$ systématiquement).

On pose $D = \prod_{H \in \mathcal{A}} (\alpha_H)^{e_H}$ où $\alpha_H \in V^*$ a H pour noyau.

C'est une équation algébrique de l'ensemble $\cup\mathcal{A}$, la réunion des hyperplans.

Prop : $D \in S(V^*)^W$. Pour (f_i) un système d'invariants de W, on pose $\Delta_f = D \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_d]$. C'est une équation polynomiale pour l'image $\mathcal{H}$ de $\cup\mathcal{A}$ dans V/W : l'hypersurface discriminante.

Ex : Pour $W = G(4,2,2)$. $D = X^2Y^2(X-Y)^2(X+Y)^2(X-iY)^2(X+iY)^2$
$= X^2Y^2(X^4-Y^4)^2$.

Pour $(P,Q) = ((XY)^2, X^4+Y^4)$, on a $\Delta_{(P,Q)} = P(Q^2-4P^2)$.

$= -4P^3 + Q^2P \in \mathbb{C}[Q][P]$
$= PQ^2 - 4P^3 \in \mathbb{C}[P][Q]$.

Def : On pose $P(W) = \pi_1(X)$ et $B(W) = \pi_1(X/W)$. On a

Thm (Steinberg) On a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow P(W) \longrightarrow B(W) \longrightarrow W \longrightarrow 1$$

issue du revêtement $X \to X/W$.

Ex : Pour $\mathfrak{S}_n$, $X/W = Conf_n(\mathbb{C})$ et $B(\mathfrak{S}_n) = Br_n$ le groupe de tresses "usuel"

3) Bien engendré, mal engendré, éléments réguliers.

Déf : $W \in GL(V)$ irréductible est **bien engendré** s'il peut être engendré par une famille de $\dim V$ réflexions.

ex : Coxeter $\Rightarrow$ bien engendré ; $G(4,2,2)$ mal engendré (au moins trois réflexions).

Théo (Bessis 07) La multiplicité de $\mathcal{H}$ en 0 est le nombre de réflexions minimales pour engendrer W. $\rightarrow$ c'est une notion géométrique !

Théo : (Bessis 15) + (Orlik Solomon 80)
W irréductible est bien engendré ssi pour tout système f d'invariants fondamentaux, Δ_f vu comme polynôme en X_n, est unitaire de degré n.

$$\frac{\partial^n \Delta_f}{(\partial X_n)^n} \in \mathbb{C}^\times$$

Ex : Ça ne marche pas pour $G(4,2,2) \rightarrow PQ^2 - 4P^3$ ↗ pas unitaire en Q ↘ pas de deg 2 en P.

Cor : On peut toujours (quitte à changer la variable) écrire

$$\Delta_f = X_n^n + \alpha_{n-2} X_n^{n-2} + \dots + \alpha_1 X_n + \alpha_0$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_{n-1}]$.

Si W est mal engendré, on peut chercher un groupe W_b (bien eng) tel que $W = C_{W_b}(g)$ où g est "régulier" pour un certain $\zeta \in \mu_d$.

On a alors $V/W \simeq (V_b/W_b)^{\mu_d}$ et $(X_b/W_b)^{\mu_d} \simeq X/W$.

II. Description de X/W via le morphisme de Lyashko Looijenga

1) Le morphisme de Lyashko Looijenga

On fixe W bien engendré et irréductible. Décrire X/W est utile pour comprendre le groupe $B(W)$.

On écrit $\Delta_f = X_n^n + a_{n-2} X_n^{n-2} \dots + a_0$.

Par relations coefficients/racines, les racines de $\Delta_f(x_1 \dots x_{n-1}, T) \in \mathbb{C}[T]$ sont 0 pour centre (= leur somme est nulle).

Déf : On définit $LL(v.W)$ comme l'ensemble des racines de $\Delta_f(f_1(v), \dots, f_{n-1}(v), f_n(v)+T) \in \mathbb{C}[T]$. $\simeq \mathbb{C}$.

Géométriquement, pour une tranche $\{v.W \mid f_i(v) = x_i \text{ pour } i \leq n-1\}$ on prend l'intersection de cette tranche avec $\mathcal{H}$, que l'on translate de $f_n(v)$.

Ex : Pour $W = G(2,1,2)$, on peut écrire $\Delta_f = Y^2 - X^4$, $LL : (a,b) \mapsto \left\{\begin{matrix} -b-a^2 \\ -b+a^2 \end{matrix}\right\}$.

L'ens d'arrivée de LL est un espace de conf, homeo à $\mathbb{C}^n$ via les fonctions symétriques élémentaires. Sous cette identif on trouve

$LL : (a,b) \mapsto (-2b, b^2 - a^4)$

En twistant $\mathbb{C}^2$ par l'homeo

$(x,y) \longmapsto \left(-\frac{1}{2}x, -y + \frac{1}{4}x^2\right)$

$(-2u, -v+u^2) \longleftarrow (u, v)$

On trouve

$(a,b) \mapsto (a, b^4)$

Prop : LL est homogène de degré $\deg f_n =: h$.

$LL^{-1}(\{0\}) = 0$.

$x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow 0 \in LL(x)$.

Théo (Bessis 15) + Dounvopoulos 17.

L'application LL est un revêtement ramifié de deg $\frac{n!h^n}{|W|}$
il ramifie précisément en les x tels que $LL(x)$ contient des points multiples.

Un chemin $\gamma : [0,1] \to V/W$ induit un chemin $LL(\gamma)$ dans l'espace des configurations. On veut décrire les fibres de LL pour obtenir des propriétés de relèvement.

2) Tunnels et étiquettes

On introduit le "point" base $\mathcal{U} = \{x \in X/W \mid LL(x) \cap i\mathbb{R}_+ = \emptyset\}$.
c'est un ouvert dense et contractile

Def : ~~Alors~~ tunnel circulaire est un couple $(x, \theta) \in \mathcal{U} \times [0, 2\pi]$
tq que l'on associe au chemin $\gamma : t \mapsto e^{it\theta} x$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$. $+ \; e^{i\theta} x \in \mathcal{U}$.

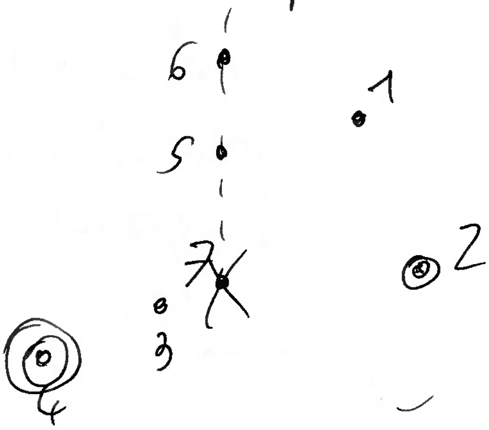
Comme LL est homogène, $LL(\gamma(t)) = e^{hit\theta} LL(x)$.

Prop : La classe δ de $(x, \frac{2\pi}{h})$ dans $\pi_1(X/W, \mathcal{U})$ ne dépend pas de x.

i.e $e^{i\theta}\gamma(t) \in \mathcal{U}$.

Lemme : Règle d'Hurwitz
Soit γ un chemin dans $\mathcal{U}$. Si $\forall t \in [0,1]$, $(\gamma(t), \theta)$ est un tunnel circulaire $\theta \in [0, 2\pi]$
alors tous les $(\gamma(t), \theta)$ sont homotopes et représentent le même élément de $\pi_1(X/W, \mathcal{U})$

Soit $x \in V/W$, on numérote les points de $\Pi(x)$ (sans multip)



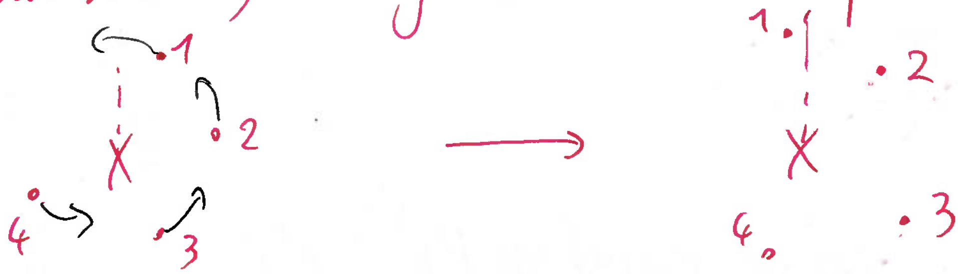
→ Sens horaire à partir de midi $+\varepsilon$

→ module croissant

→ 0 en dernier si besoin.

Rq : On peut "déplacer le centre" en jouant sur le paramètre $f_m(v)$, pour désingulariser si besoin.

Déf : Pour $x \in \mathcal{U}$, on définit la tête de x par un tunnel circulaire.



En procédant récursivement, on étiquette tous les points de $\Pi(x)$.
On définit ainsi $\mathrm{clbl}(x)$

Lemme : $\Delta_g : X/W \to \mathbb{C}^\times$ induit un morphisme "longueur" $\ell : B(W) \to \mathbb{Z}$.

Prop : Pour $x \in V/W$, le produit (dans l'ordre) des tresses de $\mathrm{clbl}(x)$ est δ.
Pour $a \in \Pi(x)$ de multiplicité m, la longueur de la tresse correspondante de $\mathrm{clbl}(x)$ est m

Théo : (Bessis 15). On pose P l'ensemble des paires composées

d'un élément de E_n ; d'une suite de tunnels dont le produit est δ et dont les longueurs sont compatibles avec les multiplicités

L'application $(LL, dbl) : V/W \longrightarrow P$ est bijective

Les fibres de LL sont donc indexées par les décomposition de δ en produit de tunnels (de longueurs compatibles).

Thm : (Bes 15) Il y a un nombre fini de tunnels (à homotopie près).
$B(W)$ est engendré par les tunnels, et avec les relations.

$$s \cdot t = r \qquad \text{où } s, t, r \text{ sont des tunnels}$$

3) Cas de $(X/W)^{\mu d}$

$$d' = \frac{d}{d \wedge h}$$

$$h' = \frac{h}{d \wedge h}.$$

Thm (Bessis 15)
$x \in (X/W)^{\mu d} \iff \begin{cases} LL(x) \text{ est invariant par } (\mu_d)^h = \mu_{d'} \\ \text{et } dbl(x) \text{ invariant sous une action } \tau^{h'} \end{cases}$

$$\tau(s_1, \dots, s_p) = (s_2 \dots s_p, s_1^{\delta})$$

$\rightarrow$ étendre ce résultat à $(V/W)^{\mu d}$

$+ \mathcal{U}^{\mu d} \rightsquigarrow$ plusieurs cc contractile $\rightarrow$ catégorie, engendrée par des "tunnels".

L'extension à $(V/W)^{\mu d}$ permet de gérer la situation locale autour de points de $(\mathcal{H})^{\mu d}$ (groupes paraboliques)