

Groupes de transformations complexes projectifs

I. Groupes de réflexions

II. Groupes de transformations.

Pour aller plus loin?

I. Groupes de réflexions

1) Cas linéaire

Sauf mention explicite du contraire, on fixe V un $\mathbb{C}$ -ev de dimension n finie.

Def: Une réflexion est un élément ^{non trivial} de $GL(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan ponctuellement. (i.e. $\pi g(\pi^{-1}) = 1$).

Un sous-groupe $\Gamma \subseteq GL(V)$ est un groupe de réflexions si l'ord fini et engendré par des réflexions.

Exemple: $\Sigma_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ par les matrices de permutation (transposition = réflexions).

- $\mu_2 \subseteq \mathbb{C}^\times = GL_1(\mathbb{C})$.

- $\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq GL_2(\mathbb{C})$.

Def: On dit que W est irréductible si: les seuls sous-espaces $\mathbb{A}$ -stables de V sont 0 et V .

Tout GRC se décompose en produit direct d'irréductibles.
 $\hookrightarrow$ il "suffit" d'étudier les irréductibles; complètement classifiés par Shephard Todd en 1954.

lemme (Schur) Si W est irréductible, $Z(W) = Z(GL(V))$, W est cyclique.

$\hookrightarrow$ le noyau de l'action de W sur $IP(V)$ est $Z(W)$, donc $\hat{W} := W/Z(W)$ agit fidèlement sur $IP(V)$.

Rq: (Éléments réguliers) Pour $g \in GL(V)$, $\xi \in \mathbb{C}^*$, on pose $V(g, \xi)$ l'espace propre de g pour la valeur ξ .

Si: $g \in W$, $\xi \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre, on a soit

- $V(g, \xi)$ est inclus dans un hyperplan associé à une réflexion de V
- Non, on dit que g est ξ -régulier.

Ces éléments jouent un rôle important mais au fond lui, nous sommes surtout intéressés par les espaces propres réguliers $V(g, \xi)$.

2) Cas projectif.

Def: Une réflexion projective est un élément non trivial de $PGL(V)$ d'ordre fini et fixant ponctuellement un hyperplan projectif.

$W \subseteq PGL(V)$ groupe de réflexions projectives si fini d'engendré par des réflexions projectives.

Lemma: - If $\pi \in GL(V)$ is a linear refl, then $\hat{\pi} \in PGL(V)$ is a projective reflection
 - If $W \subseteq GL(V)$ is a CRG, then $\hat{W} \subseteq PGL(V)$ is a projective reflection group.
 De plus, si W est irréductible, alors $\hat{W} = W/Z(W)$

Prop: - Toute réflexion projective est l'image dans $PGL(V)$ d'une réflexion linéaire
 Soit G un GRP, et soit R l'ensemble des réflexions projectives de G .
 L'ensemble $\tilde{R} = \{\pi \in GL(V) \text{ réflexion}, \hat{\pi} \in R\}$
 est fini et engendre un groupe fini $\tilde{G}$. On a $\tilde{G} = G$.

En général, on a $\tilde{W} \supseteq W$ mais pas égalité.

Ex: Prenons $W = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \rangle \simeq \text{Dihedral}(\square)$.

On a $\tilde{W} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ d'ordre 16.

en effet $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in W$, donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \tilde{R}$.

Def: On définit $\tilde{W} =: W_{\hat{g}}$ comme le groupe de réflexions total de $W \subseteq GL(V)$.

Prop: Si $W = W_{\hat{g}}$, et si $(V_{\hat{g}}, \hat{g})$ est un espace propre régulier d'un élément de V , alors $\text{codim } (V_{\hat{g}}, \hat{g}) \geq 2$

II. Groupes de tresses.

1) Cas "linéaire".

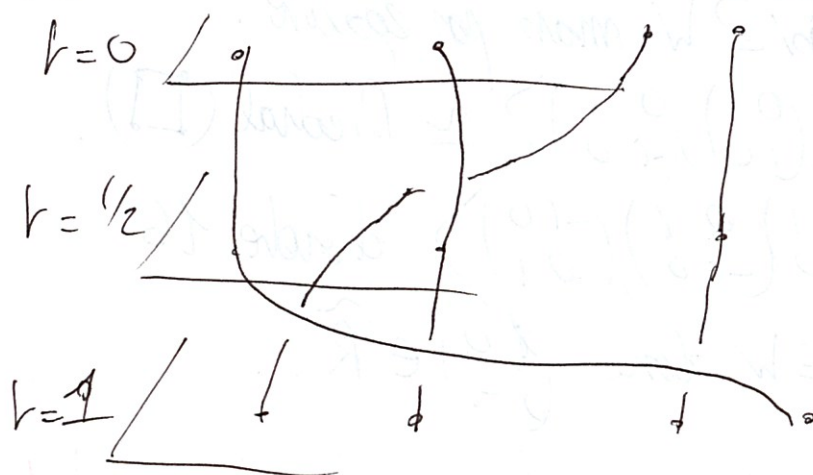
Exemple des tresses "classiques".

$W = S_n \curvearrowright \mathbb{C}^n$ par permutation. On pose
 $X = X(W) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j\}.$

$= \{v \in \mathbb{C}^n \mid \text{pour toute transposition } \tau, \tau \cdot v \neq v\}.$

L'action de W sur $X(W)$ est libre, et X/W s'identifie à l'espace des configurations de n points complexes.

$X \twoheadrightarrow X/W$ revêtement $\rightsquigarrow 1 \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X/W) \rightarrow W \rightarrow 1.$



une tresse!

$\pi_1(X/W)$ est le **groupe de tresses à n brins.**

Pour le cas "général".

Thm (Chevalley Shepard Todd.)

Soit G un groupe fini agissant sur $V = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ linéairement.

V/G est un espace affine $(\Leftrightarrow)$ G est un groupe de réflexions complexes.

Thm Steinberg Soit $v \in V$, on a

$$\text{Stab}_W(v) = 1 \Leftrightarrow \forall \pi \in W \text{ réflexion, } \pi.v \neq v.$$

On pose donc $X(W) := \{v \in V \mid \forall \pi \text{ réflexion, } \pi.v \neq v\}$ (c'est le complémentaire d'une hypersurface algébrique : l'union de tous les hyperplans de réflexions).
L'action de W sur $X(W)$ est libre et on a un revêtement $X(W) \rightarrow X(W)/W$.

Def $P(W) = \pi_1(X(W))$ le groupe de tresses pur.
 $B(W) = \pi_1(X(W)/W)$ le groupe de tresses.

Centre des groupes de tresses. On suppose W irréductible, soit $x \in X$: un pt. base.

$$\pi: t \mapsto e^{2i\pi t} x \in P$$

$$\beta: t \mapsto W.(e^{\frac{2i\pi t}{|Z(W)|}} x) \in B$$

On a $\beta^{|Z(W)|} = \pi$, $\pi \in Z(B) \cap P$ et $\beta \in Z(B)$. Mais mieux

Thm (Broué-Zak-Racine 98, Benoit 15, Digne-Paris-Michel 11)

On a $\langle \pi \rangle = Z(P)$, $\langle \beta \rangle = Z(B)$ et une suite exacte

$$1 \rightarrow Z(P) \rightarrow Z(B) \rightarrow Z(W) \rightarrow 1$$

2) Cas Projectif

On considère le groupe de réflexion projectif $\widehat{W}$, et $\widehat{X}$ l'image de X dans $\mathbb{P}(V)$.

1^{ère} idée: Définir $\pi_1(\hat{X}/\hat{W})$ comme groupe de liens projectifs de $\hat{W}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{1_W} & X/W & & \\
 \downarrow 1_{\mathbb{C}^*} & & \downarrow 1_{\mathbb{C}^*} & \rightsquigarrow & \\
 X & \xrightarrow{1_W} & \hat{X}/\hat{W} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \pi_1(\hat{X}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{X}/\hat{W})
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 \langle \pi \rangle & \hookrightarrow & \langle \beta \rangle & \longrightarrow & Z(W) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P & \hookrightarrow & B & \longrightarrow & W \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(\hat{X}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{X}/\hat{W}) & & \hat{W}
 \end{array}$$

Thm (Broué, Malle, Raquin 98)

[$\exists$ un morphisme $\pi_1(\hat{X}/\hat{W}) \rightarrow \hat{W}$ qui complète ce diagramme en un diagramme commutatif où toutes les suites sont exactes, c'est-à-dire :

Problème: Ce théorème est faux.

Exemple: $W = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$; $X = \mathbb{C}^2 \setminus \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}
 \hat{X} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus 3 \text{ pts} = \mathbb{S}^2 \setminus 3 \text{ pts} \\
 \hat{X}/\hat{W} \simeq \mathbb{S}^2 \setminus 1 \text{ point et simplement connexe.}
 \end{cases}$$

Le problème vient du fait que l'action de $\hat{W}$ sur $\hat{X}$ est pas libre.

Lemme: Pour une droite $d \in P(V)$ on a :

$$\text{Stab}_{\hat{W}}(d) = 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} d \notin \hat{X} \text{ ou} \\ d \subseteq V(g, \varepsilon) \text{ un espace propre régulier} \end{array} \right.$$

2^e idée: Partir du lemme précédent.

Def: $X_S(W) = \{v \in V \mid \text{Stab}_W v = 1\}$.
 $P_S = \pi_1(X_S(W))$, $B_S = \pi_1(X_S(W)/W)$.

Prop: - $X_S(W) \subseteq X(W)$ induit un morphisme $P_S \rightarrow P$, $B_S \rightarrow B$. Ces deux morphismes sont surjectifs.
 - S: $W = W_S$ alors ces morphismes sont des isomorphismes.

Theo: On a un diagramme commutatif de suite exactes

$$\begin{array}{ccccc}
 \langle \pi_1 \rangle & \longrightarrow & \langle B_S \rangle & \longrightarrow & Z(W) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_S & \longrightarrow & B_S & \longrightarrow & W \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(\hat{X}_S) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{X}_S/W) & \longrightarrow & \hat{W}
 \end{array}$$

$\pi_1(\hat{X}_S/W_S) = B_S / Z(B_S)$

Pour finir, on raconte l'histoire du point de vue des groupes de réflexions projectifs:

$G \subseteq \text{PGL}(V)$ un groupe de refl proj.

$$\hat{X} = \{d \in \mathbb{P}(V) \mid \text{Stab}_G(d) = 1\} = \widehat{X_S(\hat{G})}.$$

le groupe fondamental de $\hat{X}/G$ est isomorphe à $B(\hat{G})/Z(B\hat{G})$.

Pour aller plus loin.

Si $W = W_f$, un élément de B a une puissance centrale si et seulement si son image dans $B/Z(B) = \Pi_1(X/\hat{W})$ est d'ordre fini.

Mais, dans $\Pi_1(X/\hat{W})$, tout élément de B ayant une puissance centrale est envoyé sur 1. Donc $\text{Ker}(B \rightarrow \Pi_1(X/\hat{W}))$ contient le sous-groupe engendré par les éléments ayant une puissance centrale.

Dans la plupart des cas, B/K est linéaire ou cyclique donc $\Pi_1(X/\hat{W})$ est au plus cyclique, *qu'en est-il en général?*