Décomposition de Bruhat et variété de drapeaux. Cas de $GL_n(\mathbb{C})$

Un exemple préliminaire : l'espace projectif.

Soit k un corps algébriquement clos. La droite projective $\mathbb{P}^1(k)$ est donnée par
$$\mathbb{P}^1(k) = k^2 \setminus 0 / k^* = \{\text{droites vectorielles de } k^2\}$$
$$= \left\{ [x:y] = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \subseteq k^2 \mid (x,y) \neq (0,0) \right\}.$$

L'action de $GL_2(k)$ sur k^2 induit une action sur $\mathbb{P}^1(k)$ (qui factorise par $PGL_2(k)$ en fait : on peut considérer les matrices à scalaire près).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [x:y] = [ax+by : cx+dy] \quad \text{(homographie)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [z:1] = \begin{cases} \left[\dfrac{az+b}{cz+d} : 1\right] & \text{si } cz+d \neq 0 \\ [1:0] & \text{sinon} \end{cases}$$

$GL_2(k)$ agit transitivement sur k^2 donc sur $\mathbb{P}^1(k)$: une seule orbite.

Soit maintenant $B \subseteq GL_2(k)$ le groupe des matrices triangulaires supérieures. L'action restreinte est donnée par
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} . [x:y] = \left[\frac{ax+by}{c} : y\right]$$

Lemme : Cette action a deux orbites : $\mathcal{O}_0 = \{[1:0]\}$ et $\mathcal{O}_1 = \mathbb{P}^1(k) \setminus \{[1:0]\} = \{[z:1], z \in k\}$

en effet $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} [1:0] = [a:0] = [1:0]$. $\quad \begin{pmatrix} 1 & z'-z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [z:1] = [z':1]$.

On a $\{[z:1]\} \simeq k$ par proj stéréographique, $\overline{\mathcal{O}_1} = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_0 = \mathbb{P}^1(k)$.

⚠ B n'est pas distingué, son conjugué $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ induit la décomposition $[0:1] \sqcup \{[1:z]\}$.

Comment généraliser ?

On se fixe désormais $G = GL_n(\mathbb{C})$ (on peut remplacer $\mathbb{C}$ par k alg clos quelconque quitte à travailler avec Zariski).

I. Action de G sur des ensembles de sous espaces

1) Grassmanniennes.

Déf : Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On pose $E_k = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k) \subseteq \mathbb{C}^n$. Le sous-$k$-ev standard.
On pose également la grassmannienne
$$Gr_{k,n} = \{V \subseteq \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}} V = k\}.$$

ex : On a $Gr_{1,n} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $Gr_{0,n}$ et $Gr_{n,n}$ sont géométriquement des points.

Lemme : On a $G \curvearrowright Gr_{k,n}$, rayons transitivement : $Gr_{k,n} = G \cdot E_k$.
On a
$$\mathrm{Stab}_G E_k = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_1 \in GL_k(\mathbb{C}) \\ g_3 \in GL_{n-k}(\mathbb{C}) \\ g_2 \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C}) \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} GL_k & \mathcal{M}_{n-k,k} \\ 0 & GL_{n-k} \end{pmatrix} =: P_k.$$
On obtient un isomorphisme
$$\begin{aligned} G/P_k &\xrightarrow{\varphi_k} Gr_{k,n} \\ g P_k &\longmapsto g E_k. \end{aligned}$$

On pose $B = \bigcap_{k=0}^{n} P_k$ le sous groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures.

Rq : B est fermé, connexe, résoluble, et maximal parmi les sous groupes de G.

Rq : $B \ntriangleleft G$, par exemple B est conjugué à $B^- =$ Trig inférieure.

Rq : $P_k \ntriangleleft G$, donc l'action de P_k (et de B) sur G/P_k n'est pas triviale.

On restreint l'action de G sur G/P_k à une action $B \curvearrowright G/P_k$.

Quelles sont les orbites pour cette action ?

Soit $F \in Gr_{k,m}$, on considère la suite $d_i = (\dim(F \cap E_i))_{i \in [\![0,m]\!]}$

On a $\quad 0 = d_0 \leqslant d_1 \leqslant \dots \leqslant d_m = k$.

De plus, $\quad d_{i+1} \in \{d_i, d_i + 1\}$ car $E_i \subseteq E_{i+1}$ est de codimension 1

Def : Soit $F \in Gr_{k,m}$, le type de F est défini comme l'ensemble $\{i \in [\![1,m]\!] \mid d_i > d_{i-1}\}$. On l'écrit comme une suite $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

ex : E_k est toujours de type $1 < 2 \dots < k$.

ex : Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $F_{a,b} \subseteq \mathbb{C}^3$ le plan engendré par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. Le type de F_{ab} est donné par $\{1,2\}$ si $a = b = 0$ $\quad \{1,3\}$ si $\begin{matrix} a = 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}$ $\quad \{2,3\}$ si $\begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}$.

On pose $\mathcal{O}_i$ l'ensemble des points de $Gr_{k,m}$ de type $i = \{i_1 < \dots < i_k\}$.

Theo : Les B-orbites de $Gr_{k,m}$ sont exactement les $\mathcal{O}_i$ pour $i = 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

- On a un homeo $\mathbb{C}^{|i|} \longrightarrow \mathcal{O}_i$, où $|i| = \sum_{j=1}^{m} (i_j - j)$
- On a $\overline{\mathcal{O}_i} = \bigsqcup_{i' \leq i} \mathcal{O}_{i'}$ ou $i' \leq i \iff \forall j \in [\![1,k]\!]\ i'_j \leq i_a$.

$\mathcal{O}_i$ est une cellule de Schubert, $\overline{\mathcal{O}_i}$ est une variété de Schubert.

Cor : $\mathcal{O}_{1,2\dots k}$ est la seule orbite fermée, reduite à $\{E_k\}$ ce point se trouve dans toute variété de Schubert.

$\mathcal{O}_{m-k+1,\dots,m}$ est la seule orbite dense, elle est aussi la seule orbite ouverte

Dans notre exemple, $F_{00} \subseteq \overline{B.F_{a,0}} \subseteq \overline{B F_{a,b}}$ ce qu'on voit en faisant tendre a, b vers 0.

2) Drapeaux.

Déf : Un drapeau (complet) est une suite $F_0 \subseteq F_1 \dots \subseteq F_n$ de sous-espaces vectoriels emboîtés tels que $\dim F_i = i$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. (donc $F_0 = 0$ et $F_n = \mathbb{C}^n$)

Le drapeau $\mathbb{E} = (\mathbb{E}_0, \dots, \mathbb{E}_n)$ est le drapeau standard.

On pose $\mathcal{F}$ ~~l'ensemble~~ la variété des drapeaux dans $\mathbb{C}^n$

Prop : On a $G \curvearrowright \mathcal{F}$ via $g(F_0, \dots, F_n) = (gF_0, \dots, gF_n)$. Cette action est transitive (choix d'une base) : $\mathcal{F} = G.\mathbb{E}$. On a.

$$\mathrm{Stab}_G \mathbb{E} = \bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{Stab}_G \mathbb{E}_k = \bigcap_{k=0}^{n} P_k = B.$$

Donc $\varphi : G/B \to \mathcal{F}$ envoyant g sur $g.\mathbb{E}$ est un homéo

On voit que $\mathcal{F}$ est un ss-ens de $\prod_{k=0}^{n} Gr_{k,n}$ en fait on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
G/B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F} \subseteq \prod Gr_{k,n} \arrow[d, "p_k"] \\
G/P_k \arrow[r, "\varphi_k"] & Gr_{k,n}
\end{tikzcd}$$

À nouveau, on veut déterminer les B-orbites. ⚠ B n'est toujours pas distingué.

Les orbites ont la forme de doubles classes $B\backslash G/B$.

Ex : $n=2$, un drapeau est de la forme $0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 = \mathbb{C}^2$, il faut juste choisir $E_1 = \mathrm{Vect}\binom{x}{y}$: $\mathcal{F} = \mathbb{P}^1$ dans ce cas. Avec $\mathbb{E} = \{[1:0]\}$. On a résolu le problème dans l'intro

$$B\backslash G/B = \{\underbrace{\{[1:0]\}}_{B}, \underbrace{\{[z:1]\}_{z \in \mathbb{C}}}_{?}\} = \text{orbite de } [0:1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.[1:0]$$

$$\downarrow$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}B.$$

On veut reprendre notre idée pour les grassmanniennes.

Pour $F \in G/B$, on pose $d_{ij} = \dim(F_i \cap E_j)$ pour $i \geq 1, j \geq 1$.

de sorte que $d_{i\cdot}$ est le type de $F_i \in Gr_{i,n}$. On obtient un tableau de nombres $n \times n$, dont la dernière colonne/ligne est $1\,2\,3 \ldots n$.

Prop : Pour tout tableau de nombre ainsi obtenu, il existe une unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\forall i j \quad d_{ij} = \#\{ (i',j') \leq (i,j) \mid M_\sigma(i'j') = 1 \} = \text{le nombre de } 1 \text{ dans la partie supérieure gauche de } M_\sigma.$$

où M_σ = matrice de permutation de σ $\qquad M_\sigma(ij) = \delta_{i,\sigma(j)}$.

Exemple : Soit F le drapeau induit par la base $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^3$. On obtient le tableau

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1\,2\,3).$$

Def : On dit que F est en position σ (par rapport à E) pour σ la permutation ainsi construite.

Exemple : Dans $\mathbb{P}^1$, quelles sont les positions possibles pour un drapeau $[x:y]$.

- Si $[x:y] \neq [1:0]$, on a le tableau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et la permutation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to (1\,2)$
- $=$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to Id$.

Les positions possibles sont en bijection avec les doubles classes !!!

On montre facilement que, pour $F \in G/B$, $b \in B$

$$\dim(F_i \cap E_j) = \dim(b(F_i \cap E_j)) = \dim(bF_i \cap bE_j) = \dim(bF_i \cap E_j)$$

donc F et bF sont en même position. $\forall b \in B$.

La réciproque est vraie

Theo : Deux drapeaux sont dans la même B-orbite si et seulement si ils sont dans la même position (par rapport au drapeau standard)

→ Les orbites sont donc en bijection avec $\mathfrak{S}_n$.

Décrire les adhérences ? Pourquoi $\mathfrak{S}_n$?

II. Groupe de Weyl

1) Définitions

Le groupe B contient un sous groupe isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^n$ et maximal : Le tore T constitué des matrices diagonales.

Le normalisateur $N_G(T)$ de T dans G est constitué par les matrices monomiales. (i.e exactement 1 coeff non nul par ligne / colonne).

On pose $W := N_G(T)/_T$ le groupe de Weyl. Dans notre cas, il s'identifie au groupe des matrices monomiales à coefficients dans $\{0,1\}$ → C'est $\mathfrak{S}_n$.

Theo : On pose $\sigma_i = (i\ \ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. W est présenté " à la Coxeter ".

$$\boxed{W = \langle \underbrace{\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}_{=:S}} \ \left|\ \begin{array}{ll} \sigma_i^2 = 1 & \forall i \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i \in [\![1, n-1]\!] \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & |i-j| > 1 \end{array}\right\rangle.$$

Comme $s = s^{-1}$ $\forall s \in S$. Tout élément de W s'écrit comme un produit positif

ex : $\mathfrak{S}_3 = \langle s, t \mid sts = tst,\ s^2 = t^2 = 1\rangle$ ② — ②

en gén $\mathfrak{S}_{n+1} =$ o—o— . . . —o

Def : Soit $w \in W$, la longueur $\ell(w)$ de w est le + petit entier k tel que w s'écrit $s_1 \dots s_k$ avec $s_i \in S$. On a $\ell(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1$, $\ell(w) = \cancel{0}\,1 \Leftrightarrow w \in S$.

ex : $\mathfrak{S}_3$:

1	s	t	st	ts	tst
1	(12)	(23)	(123)	(132)	(13).

La longueur coïncide avec le nombre d'inversions $\ell(w) = \#\{i < j \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

En particulier, il existe un unique élément de plus grande longueur donné par $w_0 = (1\,n)(2\,n-1)(3\,n-2)\dots$ $\quad \ell(w_0) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Prop: Pour $w \in W$, $s \in S$ on a $\ell(ws) = \ell(w)-1$ ou $\ell(w)+1$. et $\ell(ws) < \ell(w) \iff$ il existe un mot de longueur $\ell(w)$ (mot réduit) qui exprime w et termine par s.

2) Décomposition de Bruhat, ordre de Bruhat

On peut choisir, pour tout $w \in W$ un relevé $\tilde{w} \in N_G(T)$. Ce relevé n'est pas canonique en général. On a cependant

Lemme: Soient $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$ deux relevés du même $w \in W$, on a $\tilde{w}T = \tilde{w}'T$ et $\tilde{w}B = \tilde{w}'B$ car $T \subseteq B$.

Déf: Pour $w \in W$, on pose $wB := \tilde{w}B$ où $\tilde{w} \in N(T)$ est un relevé quelconque de w. On pose également $BwB = \{bx \mid b \in B, x \in wB\}$ la double classe d'un relevé quelconque de w. "$C(w)$".

Théo (Décomposition de Bruhat). $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$

Ex: Pour GL_2, c'est $B \sqcup G \setminus B$, triangulaire ou non...

Quid des adhérences?

Déf (Ordre de Bruhat) Soient $u, v \in W$, on dit que $u \leq v$ s'il existe un mot réduit $s_1 \dots s_k$ exprimant v d'une suite $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ telle que $s_{i_1} \dots s_{i_j} = u$.

exp: $\mathfrak{S}_3$

: B est fermé (seule dbl classe)
: $G \setminus B$ ouvert dense pour GL_2

Théo: Pour $w \in W$, on a $\overline{BwB} = \bigsqcup_{v \leq w} BvB$.

en gen. Bw_0B est ouverte dense $\Rightarrow$ B^-B est ouvert dense.
$\overset{\shortparallel}{w_0B^-B}$

Revenons à la variété de drapeaux. On pose $\Omega_w = \varphi(B\sigma B) = B\cdot(\sigma E)$. l'orbite de $\sigma\cdot E$. On retrouve

$$G/B = \bigsqcup_{w\in W} \Omega_w \quad \text{et} \quad \overline{\Omega_w} = \bigsqcup_{v\leq w} \Omega_v \quad \Omega_w \simeq \mathbb{C}^{\ell(w)}.$$

Les Ω_w sont les cellules de Schubert, les $\overline{\Omega_w}$ les variétés de Schubert.

3) Paraboliques.

Déf : Soit $J \subseteq [\![1,n-1]\!]$. Le sous groupe $W_J = \langle s_i \mid i\in J\rangle \leq W$ est dit parabolique (standard).

Prop : L'application $W_J \longmapsto P_J := \bigsqcup_{w\in W_J} BwB$ induit une bijection entre les sous groupes paraboliques de W et les groupes $B\subseteq P\leq G$

exp : Pour $J = [\![1,n-1]\!]\setminus\{k\}$, on obtient $W_J \simeq \mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}$, le parabolique de G associé est le groupe P_k du début.

Déf : On pose $W^J = \{w\in W \mid \forall i\in J,\ \ell(ws_i) > \ell(w)\}$ les elements reduits J.

ex : Dans $\mathfrak{S}_3$, $J=\{s\}$, $W_J = \{1,s\}$, $W^J = \{1, r, sr\} \simeq W/W_J$.

Prop : $w\in W^J \Leftrightarrow$ il est un representant de longueur minimale de W/W_J

Prop : Le produit. $W^J\times W_J \longrightarrow W$ est une bijection, additive sur les longueurs : ($\ell(w^J) + \ell(w_J) = \ell(w^Jw_J)$)

Theorème : Les orbites pour l'action de P_J sur G/B sont paramétrées par $W^J \simeq W/W_J$