Journées jeunes chercheuses en topologie

11/04/25

Sous groupes paraboliques des groupes de tresses complexes.

I Groupes de tresses complexes

II. Sous groupes (pseudo)-paraboliques

III. Resultats dans le cas des groupes de tresses complexes.

I. Groupes de tresses complexes

1) Groupes de reflexions complexes.

On fixe V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n.

Def : $r \in GL(V)$ est une reflexion si r est d'ordre fini + $H_r = \mathrm{Ker}(r-1)$ est un hyperplan de V.

$W \subseteq GL(V)$ est un groupe de reflexions complexe si $|W| < \infty$ et si W est engendré par $\mathrm{Ref}(W) = \{r \in W \mid r \text{ est une reflexion}\}$. (GRC).

Exemples. - $\mathfrak{S}_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ par les matrices de permutation (transpositions = reflexions).

- $\mu_d \subseteq GL_1(\mathbb{C})$ (tout elt non trivial = reflexion)

- W un Coxeter fini, $W \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ par la représentation de Tits.

On ramène facilement l'étude à celle des GRC irréductibles classifiés totalement (une serie infinie et 34 exceptions, dont 19 de rang 2).

Def : Pour $v \in V$, on pose $W_v = \mathrm{Stab}_W(v)$, qu'on appelle sous groupe parabolique de W.

Theo (Steinberg 64) $W_v = \langle \mathrm{Ref}(W) \cap W_v \rangle = \langle \{ r \in \mathrm{Ref}(W) \mid v \in H_r \} \rangle$ est un GRC.

La taille de W_v est entièrement contrôlée par la quantité d'hyperplan de reflexions contenant v.

Cor : le treillis des sous groupes paraboliques est isomorphe au treillis d'intersections de l'arrangement des hyperplans de reflexion de W.

On obtient une stratification de V en fonction de la taille de v (plus W_v est grand, plus v est "singulier")

2) Groupes de tresses complexes.

W agit librement sur la strate ouverte $X = V \setminus \bigcup_{r \in Ref(W)} H_r$

et on a un revêtement branched $V \to V/W$, qui donne un revêtement $X \to X/W$

Def : $P(W) := \pi_1(X)$ est le groupe de tresses pur. de W $\quad 1 \to P(W) \to B(W) \to W \to 1$.

$B(W) = \pi_1(X/W)$ est le groupe de tresses de W

Exemple : Pour $W = \mu_d$, $H_r = \{0\}$, $X = \mathbb{C}^\times$. L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mu_d$ équivaut à $\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^d\end{array}$, dont la partie non ramifiée est $\begin{array}{l}\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times \\ z \mapsto z^d\end{array}$. On a donc

$$1 \to P(W) \to B(W) \to W \to 1$$
$$1 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times d} \mathbb{Z} \to \mu_d \to 1.$$

On remarque que $B(\mu_d)$ ne dépend pas de d car $(\mathbb{C}/\mu_d, \mathbb{C}^\times/\mu_d)$ ne dépend pas de d.

Def : W et W' sont isodiscriminantaux si $(V/W, X/W) \simeq (V'/W', X'/W')$.

Exemple : Pour $W = \mathfrak{S}_n$ les matrices de permutations. On a

$$X = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{C}^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\} = \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}).$$
$$X/W = \mathcal{U}\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}).$$

(notation de l'exposé de N. Guès)

Donc B(W) est le groupe de tresses usuel

Rq : Il existe des groupes de tresses complexes qui ne sont pas isomorphes à des groupes de tresses réels.

Comme W agit sur les strates de la stratification de V, on en déduit une stratification de V/W, dite <u>stratification discriminante</u>.

Relier cette stratification à des sous groupes de B(W) ?

Expl : $W = \mathfrak{S}_3$, orbite de $(1,1,2)$ =  . Pour un petit voisinage autour de ce point, on a  , dont le groupe fondamental est B_2 le groupe de tresses à 2 brins, vu comme sous groupe de B_3.

II. Sous groupes (pseudo) paraboliques.

1) Une situation purement topologique

On fixe (E, A) une paire topologique (idée : $A = E \setminus$ hypersurface, lieu singulier...) et un point base $a \in A$.

On veut comprendre la situation locale de A près d'un point $e \in E$ (potentiellement $e \notin A$).

On fixe plusieurs données :

- $V(e, E)$ la catégorie des voisinages de e dans E.
- γ un chemin $a \rightsquigarrow e$ tel que $\gamma(t) \in A \ \forall t < 1$. choix
- $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $t_0 = 0$, $\lim t_n = 1$, $t_n < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. choix.

Pour $U \in V(e, E)$, on pose $k_U = \min\{k \mid n \geq k \Rightarrow \gamma(t_n) \in U\}$. et $t_U = t_{k_U}$.

de sorte que $[t_U, 1] \subseteq \gamma^{-1}(U)$.

Prop : On définit un foncteur $P_\gamma : V(e, E) \longrightarrow \mathrm{Grp}$ en posant

- $P_\gamma(U) = \pi_1(U \cap A, \gamma(t_U))$.
- $U \subseteq U' \rightsquigarrow \iota_{U,U'} : P_\gamma(U) \to \pi_1(U' \cap A, \gamma(t_U)) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\pi_1(U' \cap A, \gamma(t_{U'}))}_{P_\gamma(U')}$.

Déf : Le groupe fondamental local de A en γ est défini comme la limite projective du foncteur P_γ : $\pi_1^{loc}(A, \gamma)$.

L'image de $\pi_1^{loc}(A, \gamma)$ par le morphisme naturel $\longrightarrow P_\gamma(E) = \pi_1(A, \gamma(0)) = \pi_1(A, a)$ est un sous groupe pseudo parabolique de $\pi_1(A, a)$.

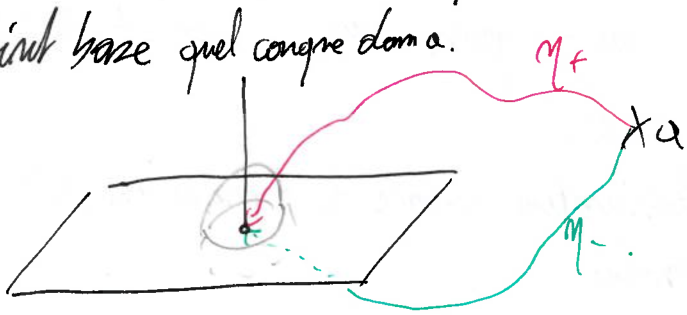
Prop : $\pi_1^{loc}(A, \gamma)$ et son image dans $\pi_1(A, a)$ ne dépendent pas du choix de la suite (t_n). Il peut être calculé en se restreignant à une base de voisinage de e.

Prop : Si $U_0 \in V(e, E)$ est tel que ι_{U, U_0} est un iso pour $U \subseteq U_0$, alors $\pi_1^{loc}(A, \gamma) \simeq P_\gamma(U_0)$ est explicitement calculable

2) Exemples

*On fixe $E=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H} = ([-1,1]^2\times\{0\}) \cup \{\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \mid a\geq 0\}$. $A = E\setminus\mathcal{H}$.

$e=(0,0,0)$ et a un point base quelconque dans a.

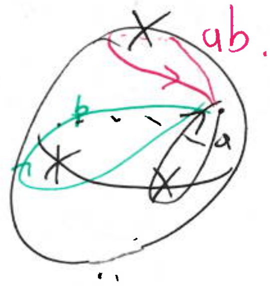


$\pi_1^{loc}(A,\eta_-)=\{1\} \neq \pi_1^{loc}(A,\eta_+)=\mathbb{Z}$. (but their images in $\pi_1(A,a)$ are equal to 1).

local fundamental groups depend on the choice of η a priori

* We know that $\mathbb{S}^2\setminus * \simeq \mathbb{C}$, thus we have two topological pairs

$(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2\setminus 3 \text{ points})$ $\quad$ $(\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus 2\text{ points})$



Dans les 2 cas, $\pi_1(A)=\mathbb{F}_2=\langle a,b\rangle$ groupe libre.

Cas 1 : paraboliques $=\{1\},\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle ab\rangle$ (à conj près).

Cas 2 : paraboliques $=\{1\},\langle a\rangle,\langle b\rangle$

III. Résultats pour les groupes de tresses complexes.

Si $B(W)$, $B(W')$ sont iso discriminantaux, alors ils ont la même collection de sous groupe parabolique.

Prop : (Gonzalez Meneses Marin 22) $v\in V$, $\eta : * \to v$.

- $\pi_1^{loc}(X/W,\eta)$ stabilise et est isomorphe à $B(W_v)$.
- $B(W)\twoheadrightarrow W$ envoie sous groupe parabolique sur sous groupe parabolique.
- Deux paraboliques de $B(W)$ sont conjugués ssi leurs images dans W le sont.

→ Les strates de V/W sont en bijection avec les classes de conjugaisons de sous groupes paraboliques de $B(W)$ (ou de W).

Theo (Gonzalez Meneses, Marin 22, G 26)

Les sous groupes paraboliques de $B(W)$ sont stables par intersection