Cat-UP-SU **12/01/2021**
Owen GARNIER

Opérades (session 1)

1 A_∞ algèbres

On prend le formalisme suivant : un complèxe de chaînes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel graduée $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ muni de d un endomorphisme gradué de degré -1 et de carré nul.

Lemme 1.1. *Si $f : C \to D$ est un isomorphisme de complexe de chaînes, et D est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre, on munit C d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre via f^{-1} : on pose $\nu(c, c') = f^{-1}(\mu(f(c), f(c'))$*

Ce cas introductif est évidemment très restrictif, et assez peu instructif, par contre il est légitime de se demander quelle est la situation si f n'est plus un isomorphisme, mais un quasi-isomorphisme ? On peut essayer de transporter naïvement la structure, mais on n'obtient pas une algèbre associative : l'associativité se fait à homotopie près, situation que nous allons décrire.

On considère $p : (A, d) \leftrightarrows (B, \delta) : i$ un rétracte par déformation [1] : $pi = 1_B$ et $ip \sim 1_A$: il existe une homotopie $h : A \to A$ de degré $+1$ telle que $1_A - ip = dh + hd$.

Considérons $\nu : A^{\otimes 2} \to A$ une structure d'algèbre différentielle graduée sur A (c'est à dire telle que d soit une dérivation de l'algèbre A). On pose alors

$$\mu_2 = p\nu i^{\otimes 2} : B^{\otimes 2} \to B$$

On obtient alors que l'associateur de μ_2 est non nul

Déjà, on peut voir l'associateur de μ_2 dans $\mathrm{Hom}\,(B^{\otimes 3}, B)$, qui est muni d'une structure de complexe de chaînes via

$$\partial(f) = \delta f - (-1)^{|f|} d_{B^{\otimes 3}} f$$

On a alors un élément $\mu_3 : B^{\otimes 3} \to B$ tel que $\partial(\mu_3)$ soit l'associateur de μ_2, on peut également définir $\mu_4, \mu_5, \cdots$ [2], où μ_n est une application n-linéaire de degré $n-2$, satisfaisant

$$\partial(\mu_n) = \sum_{\substack{k+\ell=n+1\\ 1\leqslant j\leqslant k}} \pm\mu_k(1^{\otimes j-1} \otimes \mu_\ell \otimes 1^{\otimes k-j})$$

Fort de cet exemple, on peut alors définir une A_∞ algèbre comme un complexe de chaînes (A, d) muni d'une famille $\mu_n : A^{\otimes n} \to A$, de degré $n-2$ pour $n \geqslant 2$, avec les relations ci-dessus. De sorte qu'on a pu induire une structure de A_∞ algèbre sur B depuis la structure d'algèbre associative de A.

1. Comme on travaille sur un corps, ceci n'est pas restrictif, tout quasi-isomorphismes s'étend en un rétracte homotopique
2. pour la définition précise, voir [1]

Remarque 1.2. Si $\mu_n = 0$ pour $n \geqslant 3$, on retrouve une algèbre différentielle graduée, on a en fait une inclusion pleine de la catégorie des algèbres différentielles graduées vers la catégorie des A_∞-algèbres (dont il nous reste à définir les morphismes).

Application 1.3. Comme on est sur un corps, si (A, d) est un complexe de chaînes, en posant $B_n = \operatorname{Im} d_n$, on a $A_n \simeq \operatorname{Ker} d_n \oplus \operatorname{Im} d_n \simeq H_n(A) \oplus \operatorname{Im} d_{n+1} \oplus \operatorname{Im} d_n$. On obtient grâce à cette décomposition un rétracte par déformation $i : H_\bullet(A) \leftrightarrows A : p$, qui permet de munir $H_\bullet(A)$ d'une structure d'A_∞-algèbre si A est une algèbre différentielle graduée. On appelle les produits μ_n les ***produits de Massey*** de $H_\bullet(A)$.

Exemple 1.4. Si X est un espace topologique, le cup produit munit $C^\bullet_{sing}(X)$ d'une structure d'algèbre différentielle graduée, ce qui permet de définir un produit de Massey pour la cohomologie singulière.

Définition 1.5. Soient $(A, d, \{\mu_n\})$ et $(B, \delta, \{\nu_n\})$ deux A_∞-algèbres, un A_∞-morphisme de A vers B est la donnée d'une famille $f_n : A^{\otimes n} \to B$ pour $n \geqslant 1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} \pm \nu_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}) = \sum_{\substack{k+\ell = n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \pm f_k(1^{\otimes j-1} \otimes \mu_\ell \otimes 1^{\otimes k-j})$$

avec la convention $\mu_1 = d$, $\nu_1 = \delta$, on note un tel morphisme par $f : A \rightsquigarrow B$.
Étant donné deux morphismes g et f, on définit leur composée par

$$(gf)_n = \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} \pm g_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k})$$

L'identité de A étant donné par $f_1 = 1_A$, et $f_n = 0$ si $n \geqslant 2$

Remarque 1.6. Dans les sommes ci-dessus, la condition $k \geqslant 1$ recouvre en fait un nombre fini de terme : si $k \geqslant n$, alors il n'existe pas d'indices $i_1, \cdots, i_k$ dont la somme soit égale à n.

On admet que l'on forme bien une catégorie (il faut montrer notamment que gf est encore un morphisme de A_∞ algèbre, et que la composition est associative, ce sont essentiellement des calculs à l'indicage pénible).
Remarquons que f_1 est par définition un morphisme de complexes de A vers B.

Proposition 1.7. *Un morphisme de A_∞ algèbres $f : A \to B$ est inversible si et seulement si f_1 est un isomorphisme de complexes.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat du fait de la formule de composition :

$$(gf)_1 = g_1 f_1$$

réciproquement, si f_1 est un isomorphisme, de réciproque g_1, on définit g_n par induction, par exemple on doit avoir $0 = (gf)_2 = g_1(f_2) - g_2(f_1 \otimes f_1)$, comme f_1 est un isomorphisme, cette équation détermine uniquement g_2,... □

Comme dans le cas des complexes, on peut définir un ***quasi-isomorphisme*** de A_∞ algèbres comme un morphisme de A_∞ algèbres tel que f_1 est un quasi-isomorphisme de complexe.

Alors certes on peut induire une structure de A_∞ algèbre depuis une structure d'algèbre différentielle graduée, est il possible de faire de même en partant dés le départ d'une structure de A_∞ algèbre ? La réponse est oui !

Théorème 1.8. *Soit A une A_∞ algèbre, le morphisme $\iota : H_\bullet(A) \to A$ permet d'induire une structure de A_∞ algèbre sur $H_\bullet(A)$, et ι se relève alors en un quasi-isomorphisme de A_∞ algèbres entre $H_\bullet(A)$ et A.*

Remarque 1.9. Il existe une notion de ∞-homotopie pour les morphismes de A_∞ algèbres, telle que le quotient de la catégorie des A_∞ algèbres induit soit équivalent à la catégorie homotopique des algèbres différentielles graduées (localisation pour les quasi-isomorphismes).

2 Opérades

2.1 Opérades non symétriques et alèbres

Pour construire la notion d'opérade, on s'inspire du cas des algèbres : Un exemple très basique d'algèbre associative sur un corps $\mathbb{K}$ est donné par $\mathrm{Hom}\,(V,V)$ où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (le 'produit' de l'algèbre est donné par la composition).
Considérons $(A,\mu,1)$ une algèbre associative, on peut considérer les représentations de cette algèbre : les morphismes de A vers une algèbre d'endomorphismes $\mathrm{Hom}\,(V,V)$.

Exemple 2.1. Supposons vouloir encoder la donnée d'un opérateur de carré nul dans une algèbre associative.
On considère un espace vectoriel de dimension 1 $\mathbb{K}\delta$ (engendré par un élément formel δ), et $T(\mathbb{K}\delta)$ l'algèbre tensorielle associée [3]. On considère l'algèbre $A := T(\mathbb{K}\delta)/\delta^2$ (où $\delta^2 = \delta\otimes\delta$), pour V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(T(\mathbb{K}\delta), \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)) \mid f(\delta)^2 = 0\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\delta, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)) \mid f(\delta)\circ f(\delta) = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) \mid \varphi^2 = 0\}\end{aligned}$$

Donc la donnée d'un opérateur de carré nul sur V correspond à la donnée d'une représentation de l'algèbre A.

De cet exemple naïf on tire le projet suivant : encoder certaines structures algèbriques comme représentation d'un nouvel objet : une opérade.

On souhaite maintenant construire un exemple holotypique d'opérade (de la même manière que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ est l'exemple holotypique d'algèbre associative).
Considérons $\mathrm{End}_V = \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n}, V)\}_{n\geqslant 0}$, on a une notion de composition des applications multilinéaires : si g est une application k-linéaires, et $f_{i_1},\cdots,f_{i_k}$ sont k applications multilinéaires, on peut considérer l'application $i_1+\cdots+i_k$ linéaire $g\circ(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_k})$, et cette

3. On aurait considéré $\mathbb{K}[\delta]$ si nous étions dans le cas des algèbres commutatives

composition est associative.
Enfin, on a un morphisme particulier : $1_V : V \to V$, qui se comporte bien par la composition :

$$g \circ (1_V \otimes \cdots \otimes 1_V) = g \quad \text{et} \quad 1_v \otimes g = g$$

Modelé sur cet exemple, on donne la définition suivante :

Définition 2.2. Une ***opérade non symétrique*** (ou opérade ns) est la donnée de

- Une famille $\mathcal{P}_n$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels indexée par $\mathbb{N}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, et $i_1, \cdots, i_k$ des indices, une application

$$\gamma_{i_1,\cdots,i_k} : \mathcal{P}_k \otimes \mathcal{P}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{i_k} \to \mathcal{P}_{i_1+\cdots+i_k}$$

  associative (dans le sens de [1]).
- $I \in \mathcal{P}_1$ une 'unité', telle que $\gamma_{1,\cdots,1}(g, 1, \cdots, 1) = g$ et $\gamma_k(1, g) = g$.

Exemple 2.3. Un exemple évident d'opérade ns est alors donné par End_V, γ étant la composition et $I = 1_V$.
Si $(A, \mu, 1)$ est une algèbre associative, on définit une opérade ns en posant $\mathcal{A}_1 = A$, $\mathcal{A}_n = 0$ si $n \neq 1$, $I = 1_A$, et $\gamma_1 = \mu$. Réciproquement, on peut voir qu'une opérade ns concentrée en degré 1 est une algèbre associative.

Définition 2.4. Considérons deux opérades ns $(\mathcal{P}, \gamma, I_{\mathcal{P}})$ et $(\mathcal{Q}, \zeta, I_{\mathcal{Q}})$. Un ***morphisme*** $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ entre deux opérades est la donnée d'une famille de morphismes $f_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{Q}_n$ telle que $f_1(I_{\mathcal{P}}) = I_{\mathcal{Q}}$ et

$$\zeta_{i_1,\cdots,i_k}(f_k, f_{i_1}, \cdots, f_{i_k}) = f_{i_1+\cdots+i_k} \circ \gamma_{i_1,\cdots,i_k}$$

On peut à présent définir une ***représentation*** d'une opérade $\mathcal{P}$ comme un morphisme d'opérade $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_V$, on dit de manière équivalente que V est alors muni d'une structure de ***$\mathcal{P}$-algèbre***.

On va maintenant construire une opérade particulière, notée As, de la manière suivante : pour $n \geqslant 1, As_n = \mathbb{K}\mu_n$ (où μ_n 'représente' le produit de n termes, sans parenthèsage) et $As_0 = \{0\}$. Comme tous les espaces $(As_n)_{n\geqslant 1}$ sont isomorphes à $\mathbb{K}$, on peut définir la composition γ comme la multiplication des scalaires $\mathbb{K} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Proposition 2.5. *On définit ainsi une opérade ns, et une structure d'As-algèbre sur une espace vectoriel V équivaut à la donnée d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre associative sur V.*

Démonstration. On a assez clairement une opérade ns (on sait que la multiplication est multilinéaire et unitaire). Si V est une As-algèbre, on a $\Phi(\mu_2) =: \nu : V \otimes V \to V$, et on a de plus

$$\nu(1 \otimes \nu) = \phi(\mu_2)(1 \otimes \phi(\mu_2)) = \phi(\mu_2(\mu_2 \otimes 1)) = \nu(\nu \otimes 1)$$

donc V est bien muni d'une structure d'algèbre associative. Réciproquement, si V est une algèbre associative, on peut définir $\Phi(\mu_n)$ comme le produit de n éléments, application n linéaire bien définie $V^{\otimes n} \to V$. □

De même, en posant $uAs_0 = \mathbb{K}1$ au lieu de $\{0\}$, on définit une nouvelle opérade ns uAs, qui encode cette fois les algèbres associatives unitaires.

Remarque 2.6. Il faut faire attention au fait que les algèbres associatives unitaires sont apparues deux fois : une fois comme 'modèle à suivre' pour la définition de la notion d'opérade, et ensuite comme algèbre sur une opérade particulière : uAs, ces deux interventions n'ont pas du tout le même rôle, et il ne faut pas les confondre.

2.2 Opérades, quelques exemples

Remarquons que $\mathrm{Hom}\,(V^{\otimes n}, V)$ est muni d'une action à droite du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutation des variables :

$$f^{\sigma}(v_1, \cdots, v_n) = f(v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(n)})$$

et la composition des fonctions multilinéaires admet une propriété d'équivariance pour cette action :

- si $g_{i_1}, \cdots, g_{i_k}$ sont des fonctions multilinéaires, $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{i_1}, \cdots, \sigma_k \in \mathfrak{S}_{i_k}$, alors

  $$f(g_{i_1}^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_k}^{\sigma_k}) = (f(g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_k}))^{\sigma}$$

  où σ est donné par $(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$.
- Si $\tau \in \mathfrak{S}_k$, $i_1 + \cdots + i_k = n$, on a

  $$f^{\tau}(g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_k}) = f(g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_k})^{\tau}$$

  (on fait agir τ sur $\{1, \cdots, n\}$ en permutant des blocs $\{1, \cdots, i_1\}$, $\{i_1+1, \cdots, i_1+i_2\}, \cdots$)

Définition 2.7. Une ***opérade symétrique*** (ou plus simplement opérade) est une famille $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{S}_n$ modules à droite, munie d'un élément $I \in \mathcal{P}(1)$ et d'une composition associative, unitale et équivariante (dans le sens ci-dessus).

Remarque 2.8. C'est juste une opérade ns où la composition est $\mathfrak{S}_n$-équivariente.

Considérant une opérade $(\mathcal{P}, \gamma, I)$, on a en particulier, pour $m, n \in \mathbb{N}$, une map $\gamma_{1,\cdots,1,n,1,\cdots,1} : \mathcal{P}(m) \otimes \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(m-1+n)$, qui correspond à placer une n-application en i-ème entrée d'une m-application, on obtient bien une $m-1+n$ application. On note $\circ_i$ cette composition, on a alors

- Des propriétés d'équivariance provenant de celle de la composition.
- Pour $\lambda \in \mathcal{P}(\ell), \mu \in \mathcal{P}(m), \nu \in \mathcal{P}(n)$, on a

  $$\begin{cases} (\lambda \circ_i \mu) \circ_{i-1+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu), & \forall i \in [\![1, \ell]\!], j \in [\![1, m]\!] \\ (\lambda \circ_i \mu) \circ_{k-1+m} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu, & \forall 1 \leqslant i < k \leqslant \ell \end{cases}$$

- Il existe $I \in \mathcal{P}(1)$ une identité pour la composition partielle.

Il se trouve qu'on a une réciproque : une famille $\{\mathcal{P}(n)\}$ munie d'une famille de composition partielles respectant les propriétés ci-dessus définit une opérade. La composition de l'opérade étant donnée par concaténation successives de compositions partielles.

Exemple 2.9. On peut définir une opérade Com (respectivement $uCom$) comme on avait défini A_s, c'est à dire à partir d'espaces vectoriels de dimension 1, et cette fois ci avec représentation triviale du groupe symétrique, l'équivariance étant trivialement vérifiée, on a trivialement affaire à une opérade. Et les Com-algèbres sont les algèbres commutatives (en effet, les morphismes d'opérades doivent, en plus des morphismes d'opérades ns, êtres équivariantes pour l'action de $\mathfrak{S}_n$).

Exemple 2.10. On peut aussi voir les algèbres associatives comme algèbres sur une opérade. Construisons Ass une opérade comme $Ass(n) = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ l'algèbre de groupe de $\mathfrak{S}_n$ (avec $Ass(0) = 0$). La composition est alors une application

$$\gamma_{i_1,\cdots,i_k} : \mathbb{K}[\mathfrak{S}_k] \otimes \mathbb{K}[\mathfrak{S}_{i_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}[\mathfrak{S}_{i_k}] = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_k}] \to \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$$

où $i_1 + \cdots + i_k = n$, il suffit de définir une telle application sur une base. On a un morphisme naturel du produit $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_k}$ vers $\mathfrak{S}_n$, toujours en voyant $\mathfrak{S}_k$ agissant sur des blocs, eux mêmes munis d'une action de $\mathfrak{S}_{i_j}$. Ce morphisme donne bien une composition associative équivariante. L'identité est évidemment donnée par $1 \in \mathbb{K}[\mathfrak{S}_1] = \mathbb{K}$.
Comme dans la proposition 2.5, une structure d'algèbre associative sur un espace vectoriel V correspond à une structure de Ass-algèbre : le produit de V est donné par l'image de l'élément neutre de $\mathfrak{S}_2$, cette image est à priori différente de celle de la transposition non triviale de $\mathfrak{S}_2$, qui est en fait le produit inversé $a, b \mapsto ba$.

Jusqu'ici, nous avons travaillé dans la catégorie $k - \mathbf{Vect}$ des k-espaces vectoriels, munie du produit tensoriel. On voit rapidement que la définition que nous avons donné d'une opérade peut avoir cours dans n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique (on a besoin de la symétrie pour écrire l'associativité).

Catégorie monoïdale symétrique	Type d'opérade
Espaces vectoriels $(\mathbf{Vect}, \otimes)$	Opérade linéaire
Modules gradués $(\mathbf{gr\ Mod}, \otimes)$	Opérade graduée
Modules différentiels gradués $(\mathbf{dg\ Mod}, \otimes)$	Opérade différentielle graduée
Ensembles $(\mathbf{Set}, \times)$	Opérade ensembliste
Espaces topologiques $(\mathbf{Top}, \times)$	Opérade topologique
Ensembles simpliciaux $(\mathrm{s}\mathbf{Set}, \times)$	Opérade simpliciale

Exemple 2.11. Une opérade ensembliste : Considérons une opérade ns sur **Set**, définie comme nous avions défini uAs : $Mon_n = \{\mu_n\}$ où μ_n représente un produit formel de n termes, sans parenthésage. La composition est immédiate (le but est toujours un singleton), et les algèbres sur cette opérade sont les monoïdes (on peut alors formuler proprement l'heuristique suivante : les algèbres associatives unitaires sont aux espaces vectoriels ce que les monoïdes sont aux ensembles)

Exemple 2.12. Une opérade topologique : Les petits disques. On construit l'opérade topologique D^n comme suit. Les éléments de $D^n(m)$ sont la donnée de la n-boule unité, et de m sous-n-boules d'intérieur disjoints, autrement dit de m applications $f_i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{B}^n$ dont les images ne s'intersectent pas (on note que les numérotations des petites sous-boules sont importantes). La composition est donnée en insérant des sous-boules. Et l'action du groupe symétrique se fait en permutant les numérotation des sous-boules.

Bibliographie

[1] Bruno Vallette, ALGEBRA + HOMOTOPY = OPERAD,
https ://arxiv.org/pdf/1202.3245v1.pdf

[2] Bernhard Keller, A-INFINITY ALGEBRAS, MODULES AND FUNCTOR CATEGORIES,
https ://webusers.imj-prg.fr/ bernhard.keller/publ/ainffun.pdf