Théorie de Garside. Applications aux groupes de tresses complexes. Cas de $G31$

Mémoire de Master 2

Owen Garnier

Université de Picardie Jules Verne

Année 2020-2021

Définitions

Définition

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Un groupe fini $W \leqslant \mathrm{Gl}(V)$ est un *groupe de réflexions complexes* s'il est engendré par $R := \mathrm{Ref}(W)$ l'ensemble de ses (pseudo-)réflexions.

On peut aussi (en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$) définir la notion de groupe de réflexions réelles, ces groupes sont en fait les groupes de Coxeter (finis).

Définition

Un groupe de réflexions complexes W est dit *irréductible* si la représentation (donnée par l'inclusion) $W \hookrightarrow \mathrm{Gl}(V)$ est une représentation irréductible de W.

Groupes irréductibles et classification

Par le théorème de Maschke, si $W \leqslant \mathrm{Gl}(V)$ est un groupe de réflexions complexes, il existe $W_1, \cdots, W_r$ des sous-groupes de W, agissant comme des groupes de réflexions complexes sur des sous-espaces V_i de V en somme directe.
On a une classification (due à Shephard et Todd) des groupes de réflexions complexes irréductibles

- Une série infinie $G(de, e, n)$ dépendant de 3 paramètres entiers.
- Une liste de 34 groupes exceptionnels $G_4 \cdots G_{37}$

Invariants, degrés et codegrés

L'action de W sur V induit une action sur l'algèbre des fonctions polynômiales $\mathcal{O}(V) \simeq \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$,

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd)

On peut choisir $f_1, \cdots, f_n$ homogènes dans $\mathcal{O}(V)^W$ tels que $\mathcal{O}(V)^W \simeq \mathcal{O}(V/W) \simeq \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_n]$.
La suite croissante des degrés des f_i ne dépend pas de leur choix, on l'appelle la suite des degrés de W.

Géométriquement, on obtient une identification $V/W \simeq \mathbb{C}^n$ donnée par $\overline{v} \mapsto (f_i(v))$.
On peut aussi définir (via des bases homogènes de l'espace des champs de vecteurs invariants sur V) les *codegrés* d_i^* de W (écrits dans l'ordre décroissant).

Groupes bien engendrés

Définition

Un groupe de réflexions complexes est dit *bien engendré* s'il peut être engendré par n réflexions (où $n = \dim V$).

Par construction de la représentation de Tits, les groupes de réflexions réelles sont bien engendrés. On a plus généralement

Théorème

Un groupe de réflexions complexes irréductible W est bien engendré si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $d_i + d_i^* = d_n$.

Éléments réguliers

On pose $\mathcal{A} := \{\mathrm{Ker}\,(s-1) \mid s \in R\}$ l'ensemble des hyperplans de réflexion de W, et $V^{\mathrm{reg}} := V \setminus \bigcup \mathcal{A}$ l'ensemble des *vecteurs réguliers*. On peut montrer que l'action de W sur V^{reg} est libre.

Définition

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in \mu_d$. Un élément $w \in W$ est dit *ζ-régulier* (ou d-régulier) si $\mathrm{Ker}\,(w-\zeta) \cap V^{\mathrm{reg}} \neq \varnothing$. On dira alors que d est un nombre régulier pour W.

Caractérisation des nombres réguliers

Théorème

On suppose que W est irréductible. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A(d) := \{i \in [\![1, n]\!] \mid d | d_i\} \quad \text{et} \quad B(d) := \{i \in [\![1, n]\!] \mid d | d_i^*\}$$

Le nombre d est régulier pour W si et seulement si $|A(d)| = |B(d)|$.
Le centralisateur W' d'un élément ζ-régulier w de W agit comme un groupe de réflexions complexes sur $V' = \mathrm{Ker}\,(w - \zeta)$, ses degrés/codegrés sont $(d_i)_{i \in A(d)}$ et $(d_i^*)_{i \in B(d)}$.
On a de plus $V'/W' \simeq (V/W)^{\mu_d}$ et $V'^{\mathrm{reg}}/W' \simeq (V^{\mathrm{reg}}/W)^{\mu_d}$.

Exemple : $G_{31} \hookrightarrow G_{37}$

Les degrés et codegrés de $G_{37} \simeq E_8$ sont

$$2 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 18 \quad 20 \quad 24 \quad 30$$

$$28 \quad 22 \quad 18 \quad 16 \quad 12 \quad 10 \quad 6 \quad 0$$

On retrouve que G_{37} est bien engendré, et on remarque que 4 est régulier pour G_{37}, un centralisateur associé est isomorphe à G_{31}, ses degrés /codegrés sont

$$8 \quad 12 \quad 20 \quad 24$$

$$28 \quad 16 \quad 12 \quad 0$$

En particulier, G_{31} est mal engendré.

Définition

On définit le groupe de tresses $B(W)$ (resp. le groupe de tresses pures $P(W)$) de W comme le groupe fondamental de V^{reg}/W (resp. de V^{reg}).
L'action de W sur V^{reg} est libre et induit un revêtement $V^{\mathrm{reg}} \to V^{\mathrm{reg}}/W$, d'où une suite exacte courte

$$1 \to P(W) \to B(W) \to W \to 1$$

On définira un 'point-base épais' pour $B(W)$ et $P(W)$ dans le cas d'un groupe bien engendré. Dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, le groupe de tresse ainsi défini s'identifie au 'groupe de tresses usuel' à n brins.

Morphisme de Lyashko-Looijenga et point base épais

On a vu que V^{reg} est complémentaire d'une hypersurface algébrique, il en va de même de $V^{\mathrm{reg}}/W \subset V/W \simeq \mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{H}$ l'hypersurface en question.
On identifie V/W à $Y \times \mathbb{C}$ (où $Y = \mathbb{C}^{n-1}$). Pour $y \in Y$, on définit $LL(y)$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(y, z) \in \mathcal{H}$, c'est un multi-ensemble de $\mathbb{C}$. Pour $y \in Y$, on pose

$$U_y := \{(y, z) \in V/W \mid z \notin LL(y) + i\mathbb{R}_-\}$$

qui s'identifie au complémentaire dans $\mathbb{C}$ des demi-droites descendant depuis les points de $LL(y)$. On pose également $\mathcal{U} := \bigcup_{y \in Y} U_y$, c'est un sous ensemble contractile de V^{reg}/W, qui sert de 'point-base épais' pour V^{reg}/W.

Tunnels et éléments simples

Définition

On définit un *tunnel* comme un chemin de la forme $t \mapsto (y, \gamma(t))$, où γ est un segment de $\mathbb{C}$, et dont les points de départ et d'arrivée sont dans U_y.
Un élément $b \in B(W)$ est dit *simple* s'il est représenté par un tunnel. On note $S \subset B(W)$ l'ensemble des éléments simples.

Par exemple, pour $y = 0$, $LL(y)$ est le multi-ensemble $\{0, 0, \cdots, 0\}$ formé de n copies de 0. On a donc $U_0 \approx \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, on note δ l'unique tunnel non trivial pour $y = 0$.

Monoïde d'intervalles

On définit sur W une fonction ℓ_R donnée, pour $w \in W$, par la longueur minimale d'une décomposition de w comme produit de réflexions. Pour $g, h \in W$, on peut alors définir

$$g \prec h \Leftrightarrow \ell_R(g) + \ell_R(g^{-1}h) = \ell_R(h)$$

On définit alors le *monoïde d'intervalle* $M(c)$ associé à (R et à) $c \in W$ comme un monoïde engendré par une copie formelle $\underline{[1, c]}$ de l'intervalle $[1, c]$ pour $\prec$ et sujet aux relations de la forme $\underline{st} = \underline{u}$ si $st = u$ dans W et $\ell_R(s) + \ell_R(t) = \ell_R(u)$.

Monoïde de Bessis

On définit M le sous-monoïde de $B(W)$ engendré par S, on a $B(W) = \mathrm{Frac}(M)$. En notant π la projection $B(W) \twoheadrightarrow W$, on a

Théorème

L'élément $c = \pi(\delta)$ est un élément de Coxeter (i.e d_n-régulier) de W. De plus π induit une bijection entre S et l'intervalle $[1, c]$ pour la relation $\prec$, qui se prolonge en un isomorphisme de monoïdes $M(c) \simeq M$.

Ce théorème très important permet notamment de trouver une présentation de $B(W)$ (à partir de la présentation définissant $M(c)$.

Cas des monoïdes

On commence par rappeler qu'un monoïde de Garside est un monoïde M, muni d'un élément Δ tel que

- M est ***homogène***[1] et ***simplifiable*** (à gauche et à droite).
- Les ensembles ordonnés $(M, \prec)$ et $(M, \succ)$ sont des treillis.
- L'élément Δ est équilibré, et l'ensemble S des diviseurs de Δ est fini et engendre M. Ce sont les éléments ***simples***

On a montré que la conjugaison à droite par Δ dans $Frac(M)$ se restreint à M en un automorphisme de monoïdes, que l'on note ϕ. On a donc pour $m \in M$ que $m\Delta = \Delta\phi(m)$

1. hypothèse à débattre

Traduction catégorique

Comment traduire ces différentes hypothèses dans le cas d'une catégorie ? On considère $\mathcal{C}$ une catégorie.
L'homogénéité est facile à traduire : d'un morphisme $M \to \mathbb{N}$, on passe à un foncteur $\mathcal{C} \to \mathbb{N}$, tel que les éléments de longueur > 0 engendrent $\mathcal{C}$. En particulier, on n'a pas d'isomorphismes non triviaux (ils seraient de longueur nulle !).
La simplifiabilité elle aussi est facile à traduire :

$$\forall g, g', f, \ gf = g'f \Rightarrow g = g'$$

dit simplement que f est un épimorphisme, de même la simplifiabilité à gauche revient à "tous les morphismes sont des monomorphismes".
En particulier, dans une telle catégorie, tous les morphismes sont des mono et des épi, mais aucun n'est un iso !

Relations de divisibilité/factorisabilité

Comment traduire la divisibilité en catégories ? Avec les mêmes formules que pour les monoïdes, il faut juste prendre en compte que les morphismes (les "éléments" de notre structure) ont un départ et un but.

Pour $x \in |\mathcal{C}|$, on a deux relations sur les morphismes

- Dans $\mathcal{C}(-, x)$, on a $f \prec g$ s'il existe s tel que $fs = g$.
- Dans $\mathcal{C}(x, -)$, on a $g \succ f$ s'il existe t tel que $g = tf$.

Dans le cas d'un monoïde, on obtient deux relations sur M qui sont la divisibilité à droite et à gauche "classiques".

Quid de l'élément de Garside ?

Plutôt que de partir de Δ pour définir l'automorphisme ϕ. On va d'abord considérer un automorphisme de $\mathcal{C}$, puis considérer Δ une transformation naturelle de ϕ vers $1_{\mathcal{C}}$. Ainsi, pour $x, y \in |\mathcal{C}|$ et $f : x \to y$ on a

$$f\Delta_x = \Delta_y \phi(f)$$

Qui permet de penser à ϕ comme à une "conjugaison à droite par Δ", on notera donc x^ϕ plutôt que $\phi(x)$, de même pour les morphismes. Dans la pratique, on oubliera l'indice dans la notation de Δ, pour alléger les écritures.

Les morphismes simples

On dit que $f : x \to y$ est ***simple*** si $f \prec \Delta$, ou plus précisément $f \prec \Delta_y$: il existe $\overline{f} : y^{\phi} \to x$ tel que $f\overline{f} = \Delta_y$:

$$\begin{tikzcd}
y^{\phi} \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, "\Delta_y"] & \\
x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on a $f^{\phi^{-1}} f\overline{f} = f^{\phi^{-1}}\Delta = \Delta\overline{f}$, donc $f^{\phi^{-1}} f = \Delta$, et $\Delta_{x^{\phi^{-1}}} \succ f$. On retrouve (dans un sens) que Δ est équilibré.

On note $S = S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ l'ensemble des morphismes simples.

Définition des catégories de Garside

Définition

Une *catégorie de Garside* est un triplet $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ formé une catégorie homogène simplifiable $\mathcal{C}$, d'un automorphisme ϕ de $\mathcal{C}$, et d'une transformation naturelle $\Delta : \phi \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Tels que

1. Pour tout $x \in |\mathcal{C}|$, les ensembles $\mathcal{C}(x, -)$ et $\mathcal{C}(-, x)$ sont des treillis.
2. L'ensemble $S = S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ est fini et engendre $\mathcal{C}$.

On obtient les mêmes résultats que pour les monoïdes : $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ son groupoïde des fractions, et on peut résoudre le problème du mot dans $\mathcal{G}(\mathcal{C})$...

Faire pousser sa propre catégorie avec les germes !

On introduit la notion de germes afin de pouvoir parler de présentations de catégories. Étant donné un graphe (orienté), on peut considérer une ***catégorie libre*** sur ce graphe, les morphismes entre deux sommets étant donnés par les chemins (du graphe) joignant ces deux sommets.
On appelle ***germe*** un graphe muni d'une loi de composition partielle : étant donnés des objets x, y, z, on peut composer (de façon associative, avec des identités) *certains* morphismes $x \to y$ et $y \to z$ en des morphismes $x \to z$ (si toutes les paires de morphismes sont composables, on obtient une catégorie).
Cette loi de composition donne des "relations" par lesquelles on peut quotienter la catégorie libre, pour obtenir la "catégorie présentée" par un germe fixé.

Cas du germe des simples

Considérant $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ une catégorie de Garside, l'ensemble S des morphismes simples forme un sous-graphe de $\mathcal{C}$, auquel on peut restreindre la composition dans $\mathcal{C}$ en une loi de composition partielle (on dit que l'on "peut composer" deux morphismes simples dans S quand leur composée est elle même un morphisme simple), on obtient ainsi un germe, noté $\mathcal{S}$.

Théorème

La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ présentée par le germe $\mathcal{S}$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{C}$.

On peut donc résumer toute la donnée d'une catégorie de Garside à la donnée de ses simples (et de leur composition partielle).

Germes de Garside

Définition

Un germe $\mathcal{S}$ est dit ***de Garside*** s'il respecte les conditions suivantes :

1. La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ est homogène.
2. S est $\mathcal{C}$-simplifiable : $\forall s, t \in S, f \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$, on a $(fs = ft$ ou $sf = tf) \Rightarrow s = t$.
3. Pour tout sommet x, l'ensemble ordonné $(S(-, x), \prec)$ admet un maximum noté Δ_x, et est un treillis.
4. Notant x^ϕ la source de Δ_x, l'application $(S(-, x), \prec) \to (S(x^\phi, -), \succ)$ envoyant s sur $\overline{s}$ défini par $s\overline{s} = \Delta_x$ est un isomorphisme.

Théorème

Le germe des simples d'une catégorie de Garside est un germe de Garside. Réciproquement, la catégorie présentée par un germe de Garside $\mathcal{S}$ est une catégorie de Garside, dont le germe des simples est isomorphe à $\mathcal{S}$.

Notamment, pour $s \in S(x,y)$, on a un $\overline{s} \in S(y^\phi, x)$, et un $\overline{\overline{s}} \in S(x^\phi, y^\phi)$, c'est lui que l'on note s^ϕ.
Un cas particulier de ce théorème est celui des monoïdes d'intervalles : On prend un graphe à un seul sommet, les flèches sont les éléments de $[1, c]$, et le produit partiel est défini par $uv = r$ si $uv = r$ dans W et $\ell(u) + \ell(v) = \ell(r)$. Le germe ainsi obtenu est de Garside.

Catégorie invariante

Soit $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un automorphisme qui commute avec ϕ. On s'intéresse à $\mathcal{C}^{\psi}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée des invariants de $\mathcal{C}$ sous ψ.

Théorème

Le germe $\mathcal{S}^{\psi}$ formé des simples de $\mathcal{C}$ qui sont invariants par ψ est un germe de Garside, et présente la catégorie $\mathcal{C}^{\psi}$, qui est donc de Garside.

On peut donc déterminer une présentation de $\mathcal{C}^{\psi}$, en calculant les simples de $\mathcal{C}$ invariants par ψ.

Subdivisions de l'élément de Garside

On fixe une catégorie de Garside $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$. On va construire, pour $m \in \mathbb{N}^*$, une catégorie $\mathcal{C}_m$, dite m-divisée, qui sera de Garside. On va construire un germe, donc avant tout, un graphe.
Une m-subdivision de Δ est une suite $f = (f_m, \cdots, f_1)$ de morphismes composables tels que $f_m \cdots f_1 = \Delta$,

1. Les 1 subdivision sont la famille Δ
2. Les 2 subdivisions sont les couples (s, t) de simples tels que $st = \Delta$, par simplifiabilité, les $2-$subdivisions sont en bijection avec les simples de $\mathcal{C}$.

On peut munir l'ensemble $(D_n(\Delta))_{n \in \mathbb{N}}$ des subdivisions de Δ d'une structure d'ensemble simplicial (où les degrés sont décalés : l'ensemble des 0 simplexes est $D_1(\Delta)$).

Les ensembles D_1, D_2, D_3 donnent une présentation de $\mathcal{C}$ (c'est moralement la même que celle donnée par le germe des simples). On va de même présenter une nouvelle catégorie via les ensembles D_m, D_{2m}, D_{3m}. Les m-subdivisions sont les sommets du graphe. Les flèches sont définies par des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
x_m \arrow[d, "s_m"'] & x_{m-1} \arrow[l, "f_m"'] \arrow[d, "s_{m-1}"'] & x_{m-2} \arrow[l, "f_{m-1}"'] \arrow[d, "s_{m-2}"'] & x_2 \arrow[l, dotted] \arrow[d, "s_2"'] & x_1 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[d, "s_1"'] & x_m^\phi \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "s_m^\phi"] \\
y_m & y_{m-1} \arrow[l, "g_m"] \arrow[ul, "s'_m"'] & y_{m-2} \arrow[l, "g_{m-1}"] \arrow[ul, "s'_{m-1}"'] & y_2 \arrow[l, dotted] & y_1 \arrow[l, "g_2"] \arrow[ul, "s'_2"'] & y_m^\phi \arrow[l, "g_1"] \arrow[ul, "s'_1"']
\end{tikzcd}$$

Par simplifiabilité, la seule donnée de $(s_m, \cdots, s_1)$ suffit à retrouver le morphismes. On remarque que la composée $s_m s'_m \cdots s_1 s'_1$ est elle aussi égale à Δ : les flèches sont des $2m$-subdivision de Δ.

Théorème

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, les ensembles D_m, D_{2m}, D_{3m} induisent un germe de Garside. La catégorie $\mathcal{C}_m$ présentée par ce germe est dite catégorie m-divisée associée à $\mathcal{C}$.
Le groupoïde des fractions de $\mathcal{C}_m$ est équivalent à celui de $\mathcal{C}$.

Plus généralement, les k subdivision de l'élément de Garside Δ_m de $\mathcal{C}_m$ sont en bijection avec les mk subdivisions de Δ.

Ensemble de Garside, catégorie divisée

L'endomorphisme ϕ_m de la catégorie $\mathcal{C}_m$ est décrit sur $D_m(\Delta), D_{2m}(\Delta)$ par

$$(f_m, \cdots, f_1)^{\phi_m} = (f_{m-1}, \cdots, f_1, f_m^{\phi})$$

$$(f_{2m}, f_{2m-1}, f_{2(m-1)} \cdots, f_1)^{\phi_m} = (f_{2(m-1)}, \cdots, f_1, f_{2m}^{\phi}, f_{2m-1}^{\phi})$$

En particulier, l'ordre de ϕ_m est m fois celui de ϕ (quand il est fini). La correspondance $(f_{2m}, \cdots, f_1) \mapsto f_{2m}$ induit un foncteur $\mathcal{C}_m \to \mathcal{C}$ (qui induit une équivalence entre les groupoïdes des fractions associés).

Groupoïde de tresses

Le monoïde de Bessis $M(c)$ associé à un groupe bien engendré est de Garside. L'automorphisme ϕ étant la conjugaison à droite par c. Dans le cas de G_{37}, on a $\phi^{30} = 1$. En considérant la catégorie 2-divisée associée à $M(c)$, on obtient $\phi_2^{60} = 1$, et on peut considérer ϕ_2^{15} un On considère On définit $M' := (M_2)^{\phi_2^{15}}$ la sous-catégorie invariante par ϕ_2^{15} de la catégorie 2-divisée du monoïde de Bessis de G_{37}. On a un diagramme fonctoriel

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, hook] \\
\mathcal{G}(M') \arrow[r] & \mathcal{G}(M_2) \arrow[r, "\sim"] & B_{37}
\end{tikzcd}$$

Groupoïde de tresses

Théorème

Le groupoïde $\mathcal{G}(M')$ est équivalent à B_{31}.

La construction de M' se fait via une présentation (obtenue à partir de l'ensemble $[1, c]$ des simples du monoïde $M(c)$), c'est de cette présentation catégorique que l'on va déduire une présentation de B_{31}

Groupoïd $\to$ group trick

On obtient une présentation de $\mathcal{G}(M')$ avec 88 sommets $u_1, \cdots, u_{88}$, 2603 générateurs $f_{j,i} : i \to j$, et 11065 relations de la forme $f_{k,j} f_{j,i} = f_{k,i}$.

On fixe (arbitrairement) un sommet u de ce graphe, et on doit choisir un sous arbre maximal enraciné en ce sommet. Ce choix induit un système d'isomorphismes $\phi_i : u_i \to u$, on obtient donc une famille $g_{j,i} := \phi_j f_{j,i} \phi_i^{-1}$ d'éléments de $\mathcal{G}(M')(u, u)$.

Théorème

La présentation dont les générateurs sont les $g_{j,i}$ et les relations sont celles induites par la présentation de M' est une présentation de $\mathcal{G}(M')(u, u) \simeq B_{31}$.

Calculs effectifs

On a une grande liberté sur le choix de l'arbre enraciné en u.
Grâce au foncteur $\mathcal{G}(M') \to B_{37}$, on trouve des éléments s, u, w, v, t de $\mathcal{G}(M')(u, u)$ envoyés sur des éléments de B_{37} qui respectent la présentation souhaitée de B_{31}.
On peut donc choisir l'arbre enraciné en u de sorte à ce que s, u, w, v, t fassent partie des $g_{j,i}$.
Il faut ensuite tenir compte du fait que beaucoup de $g_{j,i}$ sont triviaux, ou égaux à d'autres $g_{k,\ell}$... Une fois que l'on a tenu compte de ces identifications, on obtient une présentation de B_{31} avec 198 générateurs et 1050 relations. Parmi ces générateurs se trouvent s, u, w, v, t, dont on montre qu'ils engendrent les 193 autres. On obtient après simplifications (calculatoires) que les 9 relations de la présentation souhaitée suffisent à déduire toutes les autres.

Merci de votre attention