Compléments sur l'homologie générale Théorie des catégories (ex)triangulées

Mémoire de Master 1

Owen Garnier

Université de Picardie Jules Verne

Année 2018-2019

Catégories

Une ***catégorie*** $\mathcal{C}$ est définie par

- Des ***objets***
- Pour tout couple d'objets $X, Y \in \mathcal{C}$, un ensemble de ***morphismes*** $\mathcal{C}(X, Y)$
- Une ***composition*** des morphismes
- Des ***identitées***

Un ***foncteur*** F entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est défini par

- Une correspondance qui à un objet $X \in \mathcal{C}$ associe un objet $F(X) \in \mathcal{D}$.
- Une application $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ telle que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Catégories exactes

- Catégorie additive $\mathcal{C}$
- Classe de couples (f, g) de noyaux/conoyaux, stable par isomorphisme : les ***conflations***
- Les ***inflations*** et ***déflations*** sont stables par composition
- Les identitées sont des inflations et des déflations
- On a les diagrammes d'existence suivants

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d, dashed] \\ A' \arrow[r, hook, dashed, "g"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, two heads, dashed, "g"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Catégories triangulées

- Catégorie additive $\mathcal{T}$
- Une auto-équivalence (foncteur) $[1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$
- Une classe de ***triangles exacts*** de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

  stable par isomorphisme, un triangle sera noté (f, g, h)
- 5 axiomes supplémentaires :

Catégories triangulées

- Tout triangle de la forme $(0, 1_X, 0)$ est exact pour $X \in \mathcal{T}$
- Tout morphisme f s'inscrit dans un triangle exact (f, g, h)
- Un triangle (f, g, h) est exact si et seulement si $(-g, -h, -f[1])$ est exact
- Si (f, g, h) et (f', g', h') sont des triangles exacts, alors tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \arrow[d, "x[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1] \end{tikzcd}$$

peut être complété en un morphisme de triangles

- Axiome de l'octahèdre

On considère $\mathcal{C}$ une sous-catégorie ***stable par extensions*** d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$: Pour un triangle exact

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans $\mathcal{T}$, si $X, Z \in \mathcal{C}$, alors $Y \in \mathcal{C}$ également.

On considère $\mathcal{C}$ une sous-catégorie ***stable par extensions*** d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$: Pour un triangle exact

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans $\mathcal{T}$, si $X, Z \in \mathcal{C}$, alors $Y \in \mathcal{C}$ également.
Dans une telle catégorie, on dit que (f, g) est une ***conflation*** si il existe un triangle exact (f, g, h) dans $\mathcal{T}$.

On considère $\mathcal{C}$ une sous-catégorie ***stable par extensions*** d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$: Pour un triangle exact

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans $\mathcal{T}$, si $X, Z \in \mathcal{C}$, alors $Y \in \mathcal{C}$ également.
Dans une telle catégorie, on dit que (f, g) est une ***conflation*** si il existe un triangle exact (f, g, h) dans $\mathcal{T}$.
À priori, deux contextes très différents, mais qui fournissent des résultats similaires :

Foncteur Ext

Étant donnés deux objets $X, Z \in \mathcal{C}$, on souhaite classifier les conflations de la forme

$$X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$$

à équivalence près.

Foncteur Ext

Étant donnés deux objets $X, Z \in \mathcal{C}$, on souhaite classifier les conflations de la forme

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

à équivalence près.
Dans les deux cas, on constitue un foncteur

$$\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$$

qui donne une bijection entre $\mathrm{Ext}^1(Z, X)$ et les classes d'équivalences d'extensions de Z par X

Lemme de scindage

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une conflation, on a équivalence entre

Lemme de scindage

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une conflation, on a équivalence entre

- f est un monomorphisme scindé
- g est un épimorphisme scindé
- Y réalise la somme directe $X \oplus Z$, avec $f = \iota_X$ et $g = \pi_Z$

Lemme de scindage

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une conflation, on a équivalence entre

- f est un monomorphisme scindé
- g est un épimorphisme scindé
- Y réalise la somme directe $X \oplus Z$, avec $f = \iota_X$ et $g = \pi_Z$

Note : la suite $X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z \xrightarrow{\pi_Z} Z$ est toujours une conflation, l'extension $X \oplus Z$ correspond à $0 \in \mathrm{Ext}^1(Z, X)$

Projectifs et injectifs, condition de Frobenius

Un objet $P \in \mathcal{C}$ est ***projectif*** si et seulement si toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.
On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment de projectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une déflation $P \twoheadrightarrow X$ où P est projectif.

Projectifs et injectifs, condition de Frobenius

Un objet $P \in \mathcal{C}$ est ***projectif*** si et seulement si toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.
On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment de projectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une déflation $P \twoheadrightarrow X$ où P est projectif.

Un objet $I \in \mathcal{C}$ est ***injectif*** si et seulement si toute inflation $I \hookrightarrow Y$ est un monomorphisme scindé.
On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment d'injectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une inflation $X \hookrightarrow I$ où I est injectif.

Projectifs et injectifs, condition de Frobenius

Un objet $P \in \mathcal{C}$ est ***projectif*** si et seulement si toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.
On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment de projectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une déflation $P \twoheadrightarrow X$ où P est projectif.

Un objet $I \in \mathcal{C}$ est ***injectif*** si et seulement si toute inflation $I \hookrightarrow Y$ est un monomorphisme scindé.
On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment d'injectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une inflation $X \hookrightarrow I$ où I est injectif.

$\mathcal{C}$ est dite de ***Frobenius*** si elle admet suffisamment d'injectifs, suffisamment de projectifs, et ils coïncident

Catégorie stable

Dans une catégorie de Frobenius, on cherche à 'annuler' les injectifs/projectifs : on quotiente le groupe $\mathcal{C}(X, Y)$ par le sous-groupe $I(X, Y)$ des morphismes qui se factorisent sur un objet projectif/injectif P quelconque :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Catégorie stable

Dans une catégorie de Frobenius, on cherche à 'annuler' les injectifs/projectifs : on quotiente le groupe $\mathcal{C}(X, Y)$ par le sous-groupe $I(X, Y)$ des morphismes qui se factorisent sur un objet projectif/injectif P quelconque :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On obtient $\overline{\mathcal{C}}$ la ***catégorie stable***, ses objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$ et on a

$$\overline{\mathcal{C}}(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y) \big/ I(X, Y)$$

Catégorie stable

Dans une catégorie de Frobenius, on cherche à 'annuler' les injectifs/projectifs : on quotiente le groupe $\mathcal{C}(X, Y)$ par le sous-groupe $I(X, Y)$ des morphismes qui se factorisent sur un objet projectif/injectif P quelconque :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On obtient $\overline{\mathcal{C}}$ la ***catégorie stable***, ses objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$ et on a

$$\overline{\mathcal{C}}(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y) \big/ I(X, Y)$$

Dans les deux cas, et pour des raisons apparemment différentes, cette catégorie est triangulée

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et ensuite s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemement). On considère donc

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et <u>ensuite</u> s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemement). On considère donc

- $\mathcal{C}$ une catégorie additive.

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et <u>ensuite</u> s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemment). On considère donc

- $\mathcal{C}$ une catégorie additive.
- $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$ une foncteur (biadditif).

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et ensuite s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemement). On considère donc

- $\mathcal{C}$ une catégorie additive.
- $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$ une foncteur (biadditif).
- $\mathfrak{s}$ qui à $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ associe une classe d'équivalence de suites $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$.

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et <u>ensuite</u> s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemment). On considère donc

- $\mathcal{C}$ une catégorie additive.
- $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$ une foncteur (biadditif).
- $\mathfrak{s}$ qui à $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ associe une classe d'équivalence de suites $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$.
- Deux autres couples d'axiomes qui imitent le cas triangulé.

Catégories extriangulées

Idée : extraire les bonnes propriétés du foncteur Ext^1 des cas précédents, et ensuite s'en servir pour construire les conflations (et non pas l'inverse comme précédemement). On considère donc

- $\mathcal{C}$ une catégorie additive.
- $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$ une foncteur (biadditif).
- $\mathfrak{s}$ qui à $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ associe une classe d'équivalence de suites $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$.
- Deux autres couples d'axiomes qui imitent le cas triangulé.

Une suite $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ qui réalise une extension $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ est une ***conflation***

Premiers résultats

- Si $\mathcal{C}$ est additive, et possède une auto-équivalence [1]. Alors en posant

$$\mathbb{E}(Z, X) = \mathcal{C}(Z, X[1])$$

  on obtient que $\mathcal{C}$ est triangulée si et seulement si elle est extriangulée.
- Si $\mathcal{C}$ est extriangulée et ses inflations/déflations sont respectivement des monomorphismes/épimorphismes, alors $\mathcal{C}$ est exacte.
- Si $\mathcal{C}$ est extriangulée, et $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine stable par extension de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est extriangulée.
- La catégorie stable d'une catégorie extriangulée de Frobenius est elle-même extriangulée.

Catégorie Stable

Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on peut <u>choisir</u> une conflation

$$X \hookrightarrow I(X) \twoheadrightarrow X'$$

où $I(X)$ est injectif, on pose alors $X\langle 1 \rangle := X'$, et pour un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, on construit un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[d, "f"] & I(X) \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, dashed, "f'"] & X\langle 1 \rangle \arrow[d, dashed, "f''"] \\ Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"'] & I(Y) \arrow[r, two heads, "\pi_Y"'] & Y\langle 1 \rangle \end{tikzcd}$$

où f'' est unique dans $\overline{\mathcal{C}}$, on pose $\overline{f}\langle 1 \rangle := \overline{f''}$.

Merci de votre attention