25/03/25.
Séminaire d'Algèbre et de géométrie.
LMNO.

Groupoïdes de Garside paraboliques et applications aux groupes de tresses complexes.

I. Groupes de Garside.

1) Groupes d'Artin.

Soit S un ensemble fini. On considère une matrice de Coxeter $m : S\times S \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que

$$m(s,t) = m(t,s) \ ; \ m(s,s) = 1 \ ; \ m(s,t) \geq 2 \text{ pour } s\neq t.$$

On peut alors définir le groupe de Coxeter associé

$$W := \langle S \mid (s^2 = 1), (st)^{m_{st}} = 1 \ \forall s,t \rangle.$$

+ $m(s,t) = \infty \Rightarrow$ pas de relations.

ainsi que le groupe d'Artin associé

$$A = \langle S \mid \forall s\neq t.\ \underbrace{st\dots}_{m_{st}} = \underbrace{ts\dots}_{m_{st}} \rangle.$$

On dit que A est de type sphérique si W est fini (en particulier, $m(s,t) = \infty$ impossible).

Ex : $W = \mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique, A est le groupe de tresses usuel à n brins.

Déf : Soit $I \subseteq S$, on dit que $A_I := \langle I \rangle$ est un sous groupe parabolique standard de A.
Un sous groupe $A' \subseteq A$ est parabolique s'il existe $g \in A$ tel que $gA'g^{-1} \subseteq A$ est parabolique standard.

Ex : groupe de tresses à n brins dans groupe à $n+1$ brins.

Theo (Van der Lek 83)

Soit $I \subseteq S$. Le groupe A_I est un groupe d'Artin pour l'application $m_{I \times I} : I \to \mathbb{N} \cup \infty$.

1 – Intersection de sous groupes paraboliques

2 – Existence de cloture parabolique

3. – Normalisateur, centralisateur ... des sous groupes paraboliques.

(1) $\Rightarrow$ (2) + Sphérique ; Large type ($m_{st} > 2$) ; spherical in FC type

Cumplido, Gebhardt, Gonzalez, Meneses, Wiest 19 ; Cumplido, Martin, Vaskou 23 ; Morris Wright 21.

(3) Spherical (Paris 97, Godelle 03).

"4" Parabolique d'Artin dans un parabolique en est-il un parabolique ? OUI

FC Godelle ; Blufstein Paris 23)

2) Groupes de Garside.

Def [Dehornoy Paris 99] Un groupe de Garside est un triplet (G, M, Δ) avec G groupe, $M \subseteq G$ un sous monoïde qui engendre G, $\Delta \in M$, tels que.

- $(M, \leq)$, $(M, \geq)$ sont des treillis.
- Pour $x \in M$, la longueur d'un produit $x = s_1 \dots s_n$ avec $s_i \neq 1$ dans M est bornée
- $\underset{= S}{\mathrm{Div}(\Delta)} = \mathrm{Div}_D(\Delta)$ est fini et engendre M. (les "simples").

Exemple :

$\Delta_1 = \sigma\tau\sigma \in \langle \sigma, \tau \mid \sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau \rangle^+ = M_1 \subseteq \langle \sigma, \tau \mid \sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau \rangle$ $\quad G_1$

$\Delta_2 = ab \in \langle a, b, c \mid ab = bc = ca \rangle^+ = M_2 \subseteq \langle a, b, c \mid ab = bc = ca \rangle$ $\quad G_2$

$\Delta_3 = x^2 \in \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle^+ = M_3 \subseteq \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$ $\quad G_3$.

$$G_1 \longrightarrow G_2, \quad \sigma \longmapsto a, \quad \tau \longmapsto b$$

et

$$G_1 \longrightarrow G_3, \quad \sigma \longmapsto y^{-1}x, \quad \tau \longmapsto x^{-1}y^2$$

sont des isomorphismes de groupes.

Soit A un groupe d'Artin sphérique et W ~~le~~ groupe de Coxeter associé.
On pose $M \subseteq A$ le monoïde engendré par S.

* Par le lemme de Matsumoto, il existe une section ensembliste $W \to M$ à la projection $A \twoheadrightarrow W$. (section de Tits).
* Si W est fini, il admet un unique élément de + grande longueur w_0, on note $\Delta \in M$ son image par la section de Tits.

Theo (Deligne 72, Dehornoy Paris 99) Si A est de type sphérique, (A, M, Δ) est un groupe de Garside.
→ + simples = section de Tits.

Pour les tresses :  "half twist".

3) Sous groupes paraboliques d'un groupe de Garside.

On fixe (G, M, Δ).

Def (Godelle 07) $\delta \in M$ est un élément de Garside parabolique s'il est equilibré, simple et si $\forall s, t \in Div(\delta)$, $(st) \leq \Delta \Rightarrow (st) \leq \delta$.

Prop (Godelle 07). Si δ est un élément parabolique, $G_\delta = \langle Div(\delta) \rangle$, $M_\delta = \langle Div(\delta) \rangle^+$, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est un groupe de Garside. Sous groupe parabolique standard de (G, M, Δ). Les sous groupes paraboliques sont les conjugués des paraboliques standards.

Prop : Si A est un groupe d'Artin sphérique, les sous groupes paraboliques (std) de (A, M, Δ) sont les paraboliques (std) de A au sens classique.

Ex. $(G_1, M_1, \Delta_1) \to 1, \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle, G_1$

$(G_2, M_2, \Delta_2) \to 1, \langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, G_2$.

$(G_3, M_3, \Delta_3) \to 1, G_3$ (x et y ne sont pas parabolique standards)

"être parabolique" dépend de (G, M, Δ) et pas que de G !

On reprend les questions des paraboliques dans ce contexte.

Question 2

Lemme (Godelle 07) Les paraboliques standards sont stables par intersection

On peut alors définir pour $x \in G$ $SPC(x) = \bigcap$ Para std contenant x la clôture parabolique standard de x, et espérer que $SPC(x)$ est le plus petit parabolique $PC(x)$ contenant x au moins dans certains cas ($x \in M$ par exemple).

Def (Gonzalez Meneses, Marin 22, G.24) On dit que (G, M, Δ) préserve le support si : $\forall x, y \in M$, $\alpha \in G$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow SPC(x)^\alpha = SPC(y)$$

Théo (Gonzalez-Meneses, Marin 22) Si (G, M, Δ) préserve le support, alors les clôtures paraboliques existent, et $SPC(x) = PC(x)$ pour $x \in M$.
De plus, si (G, M, Δ) homogène, alors les sous groupes paraboliques sont stables par intersection

⚠ Préservation du support = difficile à vérifier en pratique.

II. Sous groupes paraboliques des groupes de tresses complexes.

1) Groupes de tresses complexes.

Un élément $r \in GL_n(\mathbb{C})$ est une (pseudo) réflexion si r est d'ordre fini et si $\mathrm{Ker}(r - Id)$ est un hyperplan.

Def : Un sous groupe $W \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de réflexion complexes (GRC) si : W est fini et engendré par des réflexions.

$W \subseteq GL_n(\mathbb{Q}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ groupes de Weyl $(\mathfrak{S}_n = A_{n-1}, E_6, E_7, E_8 \ldots)$

$W \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ groupes de Coxeter finis (diédraux, H_3, H_4).

Cas général : série infinie $G(de, e, n)$, + 34 exceptions. $G_4 \cdots G_{37}$ ($G_{37} = E_8$).

Pour $\pi \in GL_n(\mathbb{C})$ une reflexion, on pose $H_\pi = \mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{Id})$.
Pour $W \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ un GRC, on pose

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Stab}_W(x) = 1\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Theorème}}}{=} \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\substack{\pi \text{ reflexion} \\ \text{de } W}} H_\pi .$$

Def : $P(W) = \pi_1(X)$ le groupe de tresses pur. $B(W) = \pi_1(X/W)$ le groupe de tresses.

Ex : Pour $\mathfrak{S}_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$, $X = \{(x_i) \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$.

$$X/W = \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}).$$

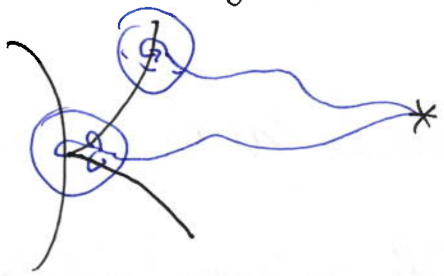
Prop (Brieskorn) Si W est un coxeter fini, $B(W)$ est le groupe d'Artin associé.

Theo : (Deligne 72, Dehornoy Paris 99, Orlik Solomon 88, Picantin 00, Bessis 15)
les groupes de tresses complexes irréductibles sont des groupes de Garside, sauf (peut-être) $B(G(de,e,n))$ pour $d, e > 1$, et $B(G_{31})$.

En revanche, $B(G(de,e,n))$ et $B(G_{31})$ sont des groupes de Garside faible, liés à des groupoïdes de Garside.

2). Sous groupes paraboliques.

Pour W un GRC, Gonzalez-Meneses et Marin definissent une collection de sous groupes de $B(W)$, qui ne depend que de la paire topologique $(X/W, \mathbb{C}^n/W)$ (groupe fondamental local).



On repose à nouveau les mêmes questions sur les paraboliques.

Rq : Parabolique $\subseteq$ Parabolique $\Rightarrow$ parabolique du parabolique ?

Stratégie de preuve :

✓ – avoir une structure de groupe de Garside homogène sur $B(W)$.

✓ – montrer que les sous groupes paraboliques algébriques et topologiques de $B(W)$.

… – montrer que la structure préserve le support.

Theo (Gonzalez Meneses, Marin 22)

Si W est irréductible … et différent de G_{31} … alors les sous groupes paraboliques de $B(W)$ sont stables par intersection.

pour G_{31}, il faut tout généraliser aux groupoïdes de Garside.

III. Groupoïdes de Garside et bancs.

1) Groupoïdes de Garside

$\mathcal{G}$ une "catégorie" (petite) + convention de composition

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & \cdot \arrow[r, "g"] & \cdot \end{tikzcd}$$

• Pour $u \in Ob(\mathcal{G})$, $f, g \in \mathcal{G}(u,-)$ $\quad f \leq g \iff \exists h \mid fh = g$

$f, g \in C(-,u)$ $\quad g \succcurlyeq f \iff \exists h'$ $g = h'f$.

Pour $\Delta : Ob(C) \to C$, on pose $Div(\Delta) = \bigcup_{u \in Ob} Div(\Delta(u))$ $\quad Div_D(\Delta) = \bigcup_{u \in Ob} Div_D(\Delta(u))$.

Def : Groupoïde de Garside = $\mathcal{G}$ groupoïde, $C \subseteq \mathcal{G}$ une catégorie qui engendre $\mathcal{G}$, $\Delta : Ob(C) \to C$ telle que

- $\Delta(u) \in C(u,-)$.
- $\forall u \in Ob(C)$, $(C(u,-), \leq)$ et $(C(-,u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.
- $\forall f \in C$, on a une borne sur les longueurs de décomposition de f dans C.
- $Div(\Delta) = Div_D(\Delta)$ est fini et engendre C.

Δ est une application de Garside

Pour $u \in Ob(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u,u)$ est un groupe de Garside faible

Rq : Groupe de Garside $\Rightarrow$ groupe de Garside faible, on ignore tout de la réciproque

Prop : La classe des groupes de Garside faible est stables par centralisateur et par sous groupe d'indice fini.

2) Sous groupoïdes paraboliques.

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ Garside.

On imite la définition d'élément de Garside parabolique, en remplaçant δ par une application $\delta : E \subseteq Ob(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ avec $\delta(u) \in \mathcal{C}(u,-)$, $\delta(u) \leq \Delta(u)$.
et s,t simples + st simple $\Rightarrow st \in Div(\delta)$. (Godelle 10)

$\mathcal{G}_\delta = \langle Div(\delta) \rangle \quad \mathcal{C}_\delta = \langle Div(\delta) \rangle^+$.

Prop : (Godelle 10) Si δ est une application de Garside parabolique, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est un groupoïde de Garside, dit groupoïde de Garside parabolique standard

Def : Un groupe de la forme $\mathcal{G}_\delta(u,u)$ est un sous groupe parabolique standard de $\mathcal{G}(u,u)$
Un sous groupe parabolique est un $H = f\, \mathcal{G}_\delta(v,v) f^{-1} \subset \mathcal{G}(u,u)$. $f \in \mathcal{G}(v,u)$

Problème : les sous groupoïdes paraboliques standards de $\mathcal{G}$ ne sont pas forcément stables par intersection !

Def : Un banc de sous groupoïdes paraboliques standards est une famille T, telle que
- $\mathcal{G} \in T$, $\{1_u\}_{u \in Ob(\mathcal{G})} \in T$.
- T est stable par l'automorphisme de Garside (conjugaison par Δ)
- L'intersection de deux éléments de T, si non vide, est dans T.

$\rightarrow$ $\mathcal{G}_\delta(u,u)$ pour $\mathcal{G}_\delta \in T$ est un T-parabolique standard. Les conjugués des T-para std sont les T-paraboliques

Def : Pour $x \in \mathcal{G}(u,u)$, $SPC_T(x) = \mathcal{G}_\delta(u,u)$ où $\mathcal{G}_\delta = \bigcap_{\substack{\mathcal{H} \in T \\ x \in \mathcal{H}}} \mathcal{H}$.
La clôture T-parabolique standard

Def : Un banc T préserve le support si pour $x, y \in E$, $\alpha \in G$, on a :

$$x^\alpha = y \Rightarrow SPC_T(x)^\alpha = SPC_T(y)$$

Théo : (G.24) Si T préserve le support, alors tout endomorphisme dans G est inclus dans un unique sous groupe T-parabolique $PC_T(x)$

- Pas d'argument général pour les intersections.
- Comment construire des bancs donnant des sous groupes paraboliques intéressants ?

3) Retour à $B(G_{31})$

Bessis 15 : $B(G_{31})$ est un groupe de Garside faible, équivalent au groupoïde de Springer $\mathcal{B}_{31}$.

Théo G.24 Il existe un banc T sur $B(G_{31})$ qui préserve le support et tel que les sous groupes T-paraboliques de $\mathcal{B}_{31}(u,u) \simeq B(G_{31})$ coïncident avec les sous groupes paraboliques topologiques de $B(G_{31})$

Cor G.24 : les sous groupes paraboliques de $B(G_{31})$ sont stables par intersection.

→ quels outils développer pour traiter les ~~autres~~ questions reliées ?