Université de Picardie Jules Verne **24/10/24 durée 2H**

Licence 2 de Mathématiques
Partiel de théorie des ensembles .

Chaque question peut être admise pour faire les suivantes. Essayez de justifier les réponses (courtes de préférences) en mettant bien en avant les arguments. Faites des dessins de patates quand c'est possible. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

Exercice 1. (1) Lesquelles des assertions suivantes sont-elles correctes?
  (a) $\varnothing \in \varnothing$.
  (b) $\varnothing \subset \varnothing$
  (c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.
  (d) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
(2) Expliciter $\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 2. (1) Redonner la définition d'une application surjective et d'une application injective.
(2) Soit $f : \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ l'application définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases}$, dire si f est injective ou surjective.
(3) Montrer qu'il existe $g : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ injective telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0,1\}}$ (où $\mathrm{id}_{\{0,1\}} : \{0,1\} \to \{0,1\}$ est l'application identité sur $\{0,1\}$).
(4) Montrer que g n'est pas unique.

Exercice 3. Pour un ensemble E, on rappelle que $E^{\mathbb{N}}$ désigne les suites à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq_E \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.
(1) Construire une injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.
(2) Construire une injection $\{0,1,2\} \to \{0,1\}^2$.
(3) Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq_E (\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}}$.
(4) En déduire qu'il existe une injection $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
(5) Conclure

Exercice 4. Soit E un ensemble infini. On note $\mathcal{P}_d(E)$ l'ensemble des parties dénombrables de E et on note On note $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble des parties finies de E.
(1) Montrer que $\mathcal{P}_f(E)$ n'est pas stable par union dénombrable (on pourra donner un exemple en prenant $E = \mathbb{N}$).
(2) Montrer que $\mathcal{P}_d(E)$ est stable par union dénombrable.
(3) On suppose que E est dénombrable, montrer que l'on peut construire une injection $\mathcal{P}_f(E) \to \cup_{n\in\mathbb{N}} E^n$ et en déduire que $\mathcal{P}_d(E)$ est dénombrable.
(4) Montrer que l'on peut construire une injection $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_d(E)$. En déduire que $\mathcal{P}_d(E)$ n'est pas dénombrable.