Université de Picardie Jules Verne **28/10/22 durée 2H**

Licence 2 de Mathématiques
Partiel de théorie des ensembles .

Chaque question peut être admise pour faire les suivantes. Essayez de justifier les réponses (courtes de préférences) en mettant bien en avant les arguments. Faites des dessins quand c'est possible (exercices 2 et 4 par exemple).

Exercice 1.
(1) Soit E un ensemble fini à n éléments. Expliquer pourquoi $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.
(2) Calculer $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Exercice 2.
(1) Soit $f : E \to F$ une application injective. Remontrer le résultat du cours qui dit qu'il existe $g : F \to E$ surjective telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (où $\mathrm{id}_E : E \to E$ est l'application identité sur E).
(2) On prend désormais $E = \{0,1\}$, $F = \{0,1,2\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que g n'est pas unique dans ce cas.
(3) Calculer les images réciproques $f^*(\{0\})$ et $f^*(\{2\})$ et l'image directe $f_*(\{0,1\})$.

Exercice 3. Soient $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré d à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
(1) Montrer que $\mathbb{Z}^d$ est dénombrable pour tout $d \in \mathbb{N}$. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
(2) En déduire que $\mathbb{Z}_d[X]$ est dénombrable.
(3) En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
(4) Montrer que $\bar{\mathbb{Q}}$, l'ensemble des nombres qui sont une solution d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, est dénombrable.
(5) En déduire qu'il existe des nombres transcendants, c'est-à-dire des nombres réels (ou complexes, comme vous voulez) qui ne sont solution d'aucun polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4.
(1) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Quels sont les ensembles suivants
$$\{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = r\} \text{ et } \{z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}?$$
(2) Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes qui ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe un unique cercle qui passe par ces trois points (c'est une question que l'on peut résoudre en quatrième).
(3) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On note $\mathcal{C}_{z_1,z_2}$ l'ensemble des cercles qui passent par z_1 et z_2. Montrer que $\mathcal{C}_{z_1,z_2}$ est en bijection avec les points de la médiatrice de $[z_1; z_2]$ (de nouveau, on se rappelle de ses cours du collège).
(4) En déduire que $\mathcal{C}_{z_1,z_2}$ n'est pas dénombrable.
(5) Montrer que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{z \in \mathbb{C},\ \exists a, b \in \mathbb{Q},\ z = a + ib\}$ est dénombrable.
(6) En déduire que l'ensemble des cercles de $\mathcal{C}_{z_1,z_2}$ qui passent par un point de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dénombrable.
(7) En déduire qu'il existe un cercle de $\mathcal{C}_{z_1,z_2}$ qui ne passe par aucun point de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (à part en z_1 et z_2).