Correction Partiel 2024-2025

Exercice 1.
1. (a) C'est faux, en effet, on a

$$\forall x, x \notin \varnothing.$$

Autrement dit, l'ensemble vide ne contient aucun élément, en particulier pas $\varnothing$.
(b) C'est vrai, en effet on a

$$\begin{aligned} &\forall x, x \notin \varnothing \\ \Rightarrow &\forall x, E, (x \notin \varnothing) \vee (x \in E) \\ \Leftrightarrow &\forall x, E, (x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in E) \\ \Leftrightarrow &\forall E, \varnothing \subset E. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, en particulier dans lui-même.
(a) C'est vrai, en effet on a

$$\forall E, E \in \{E\},$$

donc $\varnothing \in \{\varnothing\}$, qui est un ensemble contenant un seul élément : $\varnothing$.
(d) C'est vrai car l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, en particulier dans l'ensemble $\{\varnothing\}$.

2. Comme $\{1,2\}$ contient 2 éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(\{1,2\})$ en contient $2^2 = 4$. Comme dans tout ensemble, on a $\varnothing \in \mathcal{P}(\{1,2\})$, et $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$. Ensuite, $\{1,2\}$ admet les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$ comme sous-ensembles. On a bien quatre parties distinctes, d'où

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Exercice 2.
1. Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.
— On dit que f est injective (noté $f : E \hookrightarrow F$) si on a

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Par contraposée, ceci est équivalent à

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

— On dit que f est surjective (noté $f : E \twoheadrightarrow F$) si on a

$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y.$$

Autrement dit, tout élément de F admet un antécédent par f, ou encore $f_*(E) = F$ (et non un sous-ensemble strict).

2. La fonction f n'est pas injective, car on a $f(1) = 1 = f(2)$ sans avoir $1 = 2$. La fonction f est surjective, car 0 admet par exemple 0 comme antécédent et 1 admet par exemple 1 comme antécédent.

3. On raisonne par analyse synthèse. Si $g : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\{0,1\}}$, alors on a $f(g(0)) = 0$ et donc $g(0) = 0$, et $f(g(1)) = 1$ donc $g(1) = 1$ ou $g(1) = 2$. Poser $g : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ par

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(1) = 1, \end{cases}$$

répond alors à la question. 4. La fonction g' définie par $g'(0) = 0$ et $g'(1) = 2$ est une autre solution au problème de la question précédente.

Exercice 3.
1. Si $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est une suite, on peut lui associer la suite $U \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ telle que $U(n) = u(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient u, u' telles que les suites U et U' soient égales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u(n) = U(n) = U'(n) = u'(n)$. Les suites u et u' sont alors égales et nous avons une application injective.

2. On définit $f : \{0,1,2\} \to \{0,1\}^2$ par

$$\begin{cases} f(0) = (0,0), \\ f(1) = (1,0), \\ f(2) = (0,1). \end{cases}$$

(ce n'est qu'un exemple parmi d'autres). La fonction f est clairement injective car elle prend trois valeurs distinctes sur $\{0,1,2\}$.

3. Soit $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une suite. On définit $I(u) \in (\{0,1\})^{\mathbb{N}}$ comme $I(u)_n = (u_{2n}, u_{2n+1}) \in \{0,1\}^2$. Les premiers termes de la suite $I(u)$ sont donc

$$f(u) = (u_0, u_1), (u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots$$

On obtient ainsi une application $I : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}}$, dont nous montrons que c'est une bijection.
D'abord, on montre que I est injective : soient deux suites $u, v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telles que $I(u) = I(v)$, et soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, alors on a $n = 2m$ pour un $m \in \mathbb{N}$, et

$$(u_{2m}, u_{2m+1}) = I(u)_m = I(v)_m = (v_{2m}, v_{2m+1}),$$

d'où en particulier $u_n = u_{2m} = v_{2m} = v_n$. De même, si $n = 2m+1$ est impair, on obtient $u_n = v_n$. Comme $u_n = v_n$ pour tout n, on obtient que $u = v$, et donc I est injective.
Montrons ensuite que I est surjective. Soit $U \in (\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}}$ une suite. On définit une suite $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en posant

$$u_n = \begin{cases} U_n(1) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ U_n(2) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par construction, on a alors $I(u)_n = (U_n(1), U_n(2)) = U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et u est un antécédent de U par I. On a bien obtenu que I est surjective.
Comme I est à la fois surjective et injective, il s'agit bien d'une bijection.

4. On commence par montrer qu'il existe une injection $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}}$. Pour ce faire, nous utilisons la fonction f définie à la question 2. On définit $\varphi : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall u \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}, \varphi(u)_n := f(u_n) \in \{0,1\}^2.$$

En fait, on a $\varphi(u) = f \circ u$, en voyant u comme une application $\mathbb{N} \to \{0,1,2\}$. On montre que l'application φ est injective. Soient $u, v \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ telles que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = \varphi(u)_n = \varphi(v)_n = f(v_n)$. Comme f est injective, on en déduit que $u_n = v_n$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $u = v$ et donc φ est injective.
Par la question précédente, on a une bijection $(\{0,1\}^2)^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Comme composer une bijection et une injection donne une injection, on obtient une injection $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

5. Dans les questions précédentes, on a construit une injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ et une injection $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Par le théorème de Cantor Bernstein, on obtient que les deux ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

Exercice 4.
1. Prenons $E = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\{n\} \in \mathcal{P}_f(E)$. Or, on a

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$$

qui est donc une union dénombrable (indexée par $\mathbb{N}$) de parties finies. Comme $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable, on a bien le résultat. Dans le cas général, comme E est infini, on peut prendre une injection $\varphi : \mathbb{N} \to E$, et dire que

$$\varphi_*(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi(n)\}$$

est un ensemble infini (φ est injective) écrit comme union dénombrable de parties finies.

2. C'est un résultat de cours : une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrables. Comme on sait par ailleurs qu'une union de parties de E est une partie de E, on a bien qu'une union dénombrable de parties dénombrables de E est une partie dénombrable de E.

3. On commence par montrer le résultat pour $E = \mathbb{N}$. On doit donc construire une injection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$. Soit $X \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ de cardinal n. Comme $\mathbb{N}$ est totalement ordonné, on peut écrire les éléments de X dans l'ordre croissant : $X = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ (cette écriture est unique). On peut alors poser $f(X) = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$. Cette définition ne dépend d'aucun choix (l'écriture des éléments de X dans l'ordre croissant est canonique) et on a bien une application $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$, dont il nous reste à montrer qu'elle est injective.
Soient X, Y tels que $f(X) = f(Y)$. Comme la longueur du vecteur $f(X)$ est le cardinal de X, on obtient que X et Y ont le même cardinal (égal à la longueur de $f(X) = f(Y)$). De plus, on peut retrouver X à partir de $f(X)$ via l'application $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \{a_1, \dots, a_n\}$. On a donc $X = Y$ et donc f est injective.
À présent, si E est dénombrable, on peut choisir une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$. Cette bijection induit une bijection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(E)$ (l'image directe), et des bijections $\mathbb{N}^n \to E^n$, qui induisent à leur tour une bijection $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n$.
On a obtenu le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_f(E) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\simeq"] & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n \\
\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \arrow[r, hook] & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

la flèche en pointillés est une injection (comme composée d'injection et de bijections) de $\mathcal{P}_f(E)$ vers $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n$.

4. Comme E est infini, il existe une injection $\varphi : \mathbb{N} \to E$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \varphi_*(X) \end{array}$$

Pour $X \in \mathbb{N}$, φ se restreint en une bijection $X \to \varphi_*(X)$, qui prouve que $\varphi_*(X)$ est dénombrable, et donc f est à valeur dans $\mathcal{P}_d(E)$. Ensuite, f est injective. En effet, soient X, Y telles que $\varphi_*(X) = \varphi_*(Y)$. Pour tout $x \in X$, on a $\varphi(x) \in^{\varphi}_{*} (X) = \varphi_*(Y)$, il existe donc $x' \in Y$ tel que $\varphi(x') = \varphi(x)$. Par injectivité de φ, on a alors $x = x' \in Y$, et $X \subset Y$. De même, on obtient $Y \subset X$ et $X = Y$. Donc f est une injection $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_d(E)$.
Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, on en déduit que $\mathcal{P}_d(E)$ n'est pas dénombrable.