Université de Picardie Jules Verne **09/01/25 durée 2H**

Licence 2 de Mathématiques et L3 PPE
Examen de théorie des ensembles .

Exercice 1. Un compte personnel sur un site internet est protégé par mot de passe. Celui-ci doit être constitué de 8 caractères distincts parmi les 52 lettres de l'alphabet (minuscules ou majuscules) et les dix chiffres. Autrement dit, une même lettre ou un même chiffre ne peut pas apparaître deux fois dans le mot de passe (j'ai repris l'énoncé de l'examen 2022).

(1) Quel est le nombre de mots de passe possibles ?
(2) Quel est le nombre de mots de passe ne comportant que
   (a) des majuscules ?
   (b) des minuscules ?
   (c) des chiffres ?
(3) Quel est le nombre de mots de passe ne comportant que
   (a) des majuscules ou des minuscules?
   (b) des majuscules ou des chiffres?
   (c) des minuscules ou des chiffres ?
(4) Soit A, B et C trois ensembles. Rappelez la formule du crible pour $A \cup B \cup C$.
(5) Combien de mots de passe ne comportent pas au moins un chiffre, une minuscule et une majuscule (au moins un de chaque)? Combien de mots de passe comportent au moins un chiffre, une minuscule et une majuscule ?

Exercice 2. Soit n un entier et $p \in]0, 1[$.

(1) Justifier que pour tout a et b réels, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{1}$$

(2) Déduire de (1) que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(3) En dérivant (1) par rapport à a montrer que

$$n(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} a^{k-1} b^{n-k}.$$

En déduire

$$n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

et

$$n(1-2p)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

(4) En déduire

$$n + n(1-2p)^{n-1} = \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{n} 2k \binom{n}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 3. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On définit une partition de E par la donnée de $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$, une collection de sous ensembles de E tels que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^m A_i = E$, par convention. On appelle m le nombre d'éléments de la partition.

(1) Montrer que E est une partition de E, donner son nombre d'éléments. Montrer que $(E, \varnothing)$ et $(\varnothing, E)$ sont des partitions de E, donner leur nombre d'éléments.

(2) Dans le cas où $E = \{1, 2\}$ donner toutes les partitions à 2 éléments.

(3) On cherche à déterminer le nombre de partitions de cardinal m. Pour cela, pour $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$ une partition de E à m éléments, on définit:

$$\begin{cases} f_{\mathcal{A}} : & E \to \{1, \dots, m\} \\ & x \mapsto i, \text{ pour } x \in A_i \end{cases}$$

Montrer que l'application $\mathcal{A} \mapsto f_{\mathcal{A}}$ est une bijection de l'ensemble des partitions à m d'éléments dans l'ensemble des applications de E dans $\{1, \dots, m\}$ (je mettrai des points pour montrer que c'est injectif et des points pour montrer que c'est bijectif).

(4) En déduire que le nombre de partitions à m éléments est m^n.

(5) On cherche à déterminer le nombre de couples (A, B) tels que $A \cup B = E$ (on n'impose plus $A \cap B = \varnothing$). Montrer que l'application qui à un tel couple (A, B) associe $(A \backslash (A \cap B), A \cap B, B \backslash (A \cap B))$ est une bijection à valeurs dans l'ensemble des partitions à 3 éléments. Conclure.

.