Université de Picardie Jules Verne **16/06/25 durée 2H**

Licence 2 de Mathématiques
Examen de théorie des ensembles.
Deuxième session

Chaque question peut être admise pour faire les suivantes.

Exercice 1. Pour un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

(1) Calculer $\mathcal{P}(\varnothing)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.
(2) Soit E un ensemble fini à n éléments. Expliquer pourquoi $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

Exercice 2. Soient $n < m$ deux entiers de $\mathbb{N}^*$ (si vous êtes perdu, vous pouvez prendre $n = 2$ et $m = 4$).

(1) Construire une surjection de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.
(2) Construire une injection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$.
(3) Construire une application de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ qui n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 3. Un compte personnel sur un site internet est protégé par mot de passe. Celui-ci doit être constitué de 8 caractères distincts parmi les 26 lettres de l'alphabet et les dix chiffres. Autrement dit, une même lettre ou un même chiffre ne peut pas apparaître deux fois dans le mot de passe .

(1) Quel est le nombre de mots de passe possibles ?
(2) Quel est le nombre de mots de passe ne comportant que
  (a) des lettres ?
  (b) des chiffres ?
(3) Combien de mots de passe comportent au moins un chiffre et une lettre ?

Exercice 4. (1) Rappeler la définition $\binom{n}{k}$ pour deux entiers k et n (qu'est-ce que ça représente en terme de dénombrement?) et donner la formule.
(2) Donnez la formule du triangle de Pascal.
(3) Donner la formule du binôme de Newton.
(4) Soit n un entier pair. Justifier que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$.