TD 3 - Ensembles finis, dénombrement

† *Les bases*

Exercice 1. On fixe deux entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$. Préciser le cardinal de chacun des ensembles suivants

$$X = [\![p, n]\!] = \{p, \dots, n\}, \qquad Y = [\![-p, n]\!] = \{-p, \dots, n\}, \qquad T = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q < n\},$$
$$A = \{(x,y) \in [\![1,n]\!]^2 \mid x < y\}, \quad B = \{(x,y) \in [\![1,n]\!]^2 \mid x \leqslant y\}, \quad C = \{(x,y,z) \in [\![1,n]\!]^3 \mid x \leqslant y \leqslant z\}.$$

Exercice 2. On considère une grille 4×4. En introduisant les ensembles $\mathcal{C}_k$ des carrés inscrits dans cette grille et dont les côtés ont longueur k carreaux, calculer le nombre de carrés inscrits dans cette grille.
Généraliser le problème à une grille de taille $n \times n$ avec $n \geqslant 1$.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 1$. On considère

$$P_n^1 = \{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \mid n \notin A\} \text{ et } P_n^2 := \{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \mid n \in A\}.$$

1. Montrer que $\phi : P_n^2 \to P_n^1$ qui à A associe $A \cup \{n\}$ est une bijection. En déduire $\mathrm{Card}(P_n^1) = \mathrm{Card}(P_n^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}([\![1,n]\!])) = 2P_n^1 = 2\,\mathrm{Card}(\mathcal{P}([\![1,n]\!])) = 2^n$.

Exercice 4. On tire au hasard et sans remise n éléments dans $[\![1, 2n]\!]$. Quelle est la probabilité de ne tirer que des nombres pairs ?

Exercice 5. Soit X un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathcal{P}(X)$ les parties de X, $\mathcal{P}_p(X)$ les parties de X de cardinal pair et $\mathcal{P}_i(X)$ les parties de X de cardinal impair. On se propose de montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(x)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_i(x)) = 2^{n-1}$.

1. On suppose d'abord que n est impair.
   (a) En considérant l'application qui à une partie de X associe son complémentaire, démontrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(X)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_i(X))$.
   (b) Montrer que cette valeur commune est 2^{n-1}.
2. On suppose que n est pair et on fixe un $x \in X$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{Card}(\{A \in \mathcal{P}_p(X) \mid x \in A\}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_i(X \setminus \{x\}))$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(X)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(X \setminus \{x\})) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_i(X \setminus \{x\}))$.
   (c) Conclure.

Exercice 6. Soit X un ensemble fini de cardinal n. En appliquant la formule du binôme à $(1+1)^n$ et $(-1+1)^n$ et en faisant une soustraction, retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 7. Prouver la formule du triangle de Pascal par un calcul direct.

Exercice 8. Prouver la formule du binôme par récurrence.

† *Dans la vie de tous les jours*

Exercice 9. On souhaite rallier les villes A et C en passant par la ville B. Un logiciel propose $k \in \mathbb{N}^*$ itinéraires de A à B et $\ell \in \mathbb{N}^*$ de B à C.

1. Combien d'itinéraires obtenez-vous pour vous rendre de A à C via B.
2. Pour le trajet retour, on souhaite encore passer par B mais ne pas emprunter un itinéraire déjà pris à l'aller. Combien y-a-t-il de choix ?

Exercice 10 (Bon appétit)**.**

1. Sachant que les quatre principaux producteurs de blé mondiaux (UE, Chine, CEI et Inde) se partagent 50% de la production mondiale, quelle est la plus grande part de cette production que peut réaliser le pays classé au 9ème rang ?
2. En France, les fabriquants de produits alimentaires sont contraints de donner la composition de leur produit. Les ingrédients sont indiqués par ordre décroissant de proportion. De plus, si l'ingrédient est mis en valeur sur le produit (affichage, dénomination, par exemple, un crabe sur un paquet de surimi), alors le pourcentage de ce composant doit être indiqué explicitement.
   Extrait de la liste des ingrédients d'un hachis parmentier du commerce : Eau, boeuf cuit 20%, flocons de pomme de terre 7%, pommes de terre 7%, huile de colza, carottes, oignons, amidon de manioc, poudre de lait, ail, sel, ail déshydraté, épaississants...
   Quelle est la proportion minimale d'eau dans ce plat cuisiné ?

Exercice 11. On tire 6 chiffres distincts dans $[\![1, 9]\!]$. Montrer que l'on peut en prendre 2 dont la somme fait 10 (on pourra regarder les "tiroirs" $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$).
Autre exemple : sachant que la Picardie a 1,9 millions d'habitants et que le nombre maximum de cheveux d'une personne est 600 000, montrer qu'au moins 4 picards ont le même nombre de cheveux.

Exercice 12. Une entreprise fabrique des feutres de trente couleurs différentes. Le service commercial propose de constituer des lots de 12 feutres tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts de ce type peut-on former sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un feutre bleu clair et un feutre bleu marine ?
3. Le service commercial abandonne l'idée et décide de constituer des lots de 12 feutres quelconques, c'est-à-dire non nécessairement tous différents. Combien de lots distincts peut-on ainsi former ?

Exercice 13. Un compte personnel sur un site internet est protégé par mot de passe. Celui-ci doit être constitué de 8 caractères parmi les 52 lettres de l'alphabet (minuscules et majuscules) et les 10 chiffres.

1. Quel est le nombre de mots de passe possible ?
2. Quel est le nombre de mots de passe ne comportant que
   (a) des majuscules ?
   (b) des minuscules ?
   (c) des chiffres
3. Quel est le nombre de mots de passe ne comportant que
   (a) des majuscules ou des minuscules ?
   (b) des majuscules ou des chiffres ?
   (c) des minuscules ou des chiffres ?
4. Combien de mots de passe comportent au moins un chiffre, une minuscule et une majuscule ?

Exercice 14 (Anniversaires)**.**

1. On tire k dates d'anniversaire. Combien y-a-t-il de combinaisons possibles ? Combien y-a-t-il de combinaisons possibles où toutes les dates sont différentes ? En déduire que si l'on a 27 personnes dans une salle, il y a de bonnes chances que 2 aient le même anniversaire ?
2. Montrer que dans une assemblée de 733 personnes, 3 d'entre elles au moins sont nées le même jour.

Exercice 15. 1. Parmi les 68 membres du laboratoire de mathématiques, 32 pratiquent un instrument de musique, ce qui n'est le cas que de 5 des 17 membres qui ont une activité sportive régulière (données non contractuelles). Combien de membres du laboratoire n'ont de pratique ni sportive ni instrumentale ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles finis. Écrire la formule suivante pour $n = 2$, $n = 3$, puis la montrer pour tout n.

$$\mathrm{Card}(X_1 \cup \cdots \cup X_n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k-1} \,\mathrm{Card}(X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \cdots \cap X_{i_k}) \right]$$

3. Dans une association, chaque membre pratique au moins l'un des trois ateliers suivants : danse, informatique ou musique. Combien l'association compte-t-elle de membres sachant que 42 pratiquent la danse, 28 l'informatique, 36 la musique, 14 la danse et l'informatique, 10 l'informatique et la musique, 18 la musique et la danse, et 6 les trois activités ?

† *Des chiffres et des lettres*

Exercice 16 (Exercice de style ?)**.** Raymond Queneau a écrit un ouvrage innovant de littérature combinatoire intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est constitué de 10 pages. Chacune d'elles est découpée en 14 bandes horizontales contenant chacune sur son recto un alexandrin (tous les vers d'une même bande ont la même rime). Le lecteur est invité à composer son propre sonnet (2 quatrains et 2 tercets) en choisissant une page pour chacune des 14 bandes. Justigier le titre de cet ouvrage.

Exercice 17. Les plaques d'immatriculation sont constituées de deux lettres, suivies d'un entier compris entre 1 et 999, puis à nouveau de deux lettres. Par exemple AC–251–LZ.

1. Sachant que les lettres I,O et U ne sont pas utilisées par crainte de confusion avec les chiffres 1,0 et la lettre V, combien existe-t-il de plaques possibles ?
2. Pour se conformer au code pénal qui réprime le port ou l'exhibition d'insignes emblèmes rappelant ceux d'organisation ou de personnes responsables de crimes contre l'humanité l'association des lettres SS est interdite. Quel est le nombre de plaques autorisées ?

Exercice 18. Soit N l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 10 comporte au plus 7 chiffres et A l'ensemble de ceux en ayant exactement 7.

1. Calculer les cardinaux de A et de N.
2. Calculer le nombre d'entiers pairs dans A et dans N.
3. Calculer le nombre d'éléments de A et N qui sont multiples de 10 et qui ne contiennent pas le chiffre 1.
4. Calculer le nombre d'éléments dans A dont les chiffres sont tous distincts.

Exercice 19. Déterminer le nombre d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres est 3.

Exercice 20. 1. Combien y a-t-il d'anagrammes des mots étourdis et huluberlu ?

2. Combien de mots sans répétition de lettre peut-on former avec un alphabet de n lettres ?

† *Exemples plus avancés*

Exercice 21 (Formule du crible)**.** On propose une preuve de la formule du crible par récurrence sur le nombre d'ensembles. Soit donc (H_n) la propriété "Pour toute collection d'ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=j}} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right].\text{"}$$

1. Vérifier (H_1) et (H_2).
2. On suppose que (H_n) est vraie pour un n donné. On prend $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des ensembles finis. Montrer que
$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{Card}\left(A_{n+1}\right) - \mathrm{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right).$$
3. Montrer que
$$\mathrm{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=j}} \mathrm{Card}\left(A_{n+1}\cap\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right].$$
4. Montrer (H_{n+1}). Conclure.

Exercice 22. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Pour un entier naturel n, on appelle un chemin de longueur n une suite de n segments de longueur 1, soit horizontalement vers la droite, soit verticalement vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins de longueur n partant de l'origine ? Quel est l'ensemble E de leurs extrémités ? Que vaut $\mathrm{Card}(E)$?
2. Pour un point M de coordonnées (p, q) (où p et q sont des entiers naturels), combien de chemins différents relient l'origine et M ?

Exercice 23.

1. Une urne contient n boules distinctes et l'on veut sélectionner k boules. Cette sélection peut se faire de quatre manières différentes (avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée, en tenant compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées). Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

	avec ordre	sans ordre
avec remise		
sans remise		

2. Soient $X := [\![1, k]\!]$ et $Y := [\![1, n]\!]$. On considère l'ensemble U des fonctions de Y^X injectives, l'ensemble V des fonctions Y^X croissantes et l'ensemble W des fonctions de Y^X strictement croissantes. Vérifier que $\mathrm{Card}(Y^X)$, $\mathrm{Card}(U)$, $\mathrm{Card}(V)$ et $\mathrm{Card}(W)$ remplissent les cases du tableau.

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire le développement de $(1+x)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En écrivant de deux façons différentes la dérivée de l'application $x \mapsto (1+x)^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer $\sum_{X\subset E} \mathrm{Card}(X)$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{X\subset E} \frac{1}{\mathrm{Card}(X)+1}$ où E est un ensemble de cardinal n.

Exercice 25. Prouver la formule d'inversion de Pascal directement.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule pour

$$\sum_{k \leq n,\ k \text{ divisible par } 3} \binom{n}{k}.$$

On pourra astucieusement combiner $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ où $j = e^{2i\pi/3}$ (en se souvenant que $j^2+j+1 = 0$).

Exercice 27. Soient p et q deux entiers. Le but de cet exercice est de montrer que $S_{p,q}$, le nombre de surjections d'un ensemble X à p éléments dans un ensemble Y à q éléments est donné par

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} k^p.$$

1. On fixe $Z \subset Y$. On note A_Z l'ensemble des applications $f : X \to Y \backslash Z$. Calculer le cardinal de A_Z.
2. Montrer que $S_{p,q} = q^p - \operatorname{Card}\left(\bigcup_{y \in Y} A_{\{y\}}\right)$.
3. Montrer que
$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{y \in Y} A_{\{y\}}\right) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \sum_{Z \subset Y,\ \operatorname{Card}(Z)=k} \operatorname{Card}(A_Z).$$
4. Quel est la valeur de $\operatorname{Card}(\{Z \subset Y,\ \operatorname{Card}(Z) = k\})$?
5. Conclure.

Exercice 28. Démontrer (sans récurrence) que pour tout n, p dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, on a la Formule de Pascal généralisée

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Exercice 29.

1. Démontrer (sans récurrence) que pour tout n, p dans $\mathbb{N}$, on a la *formule de Vandermonde*
$$\binom{n+p}{q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \binom{p}{q-p}.$$
2. Déterminer le nombre de parties de $\{1, \dots, 2n\}$ contenant autant de nombres pairs que de nombres impairs.

Exercice 30. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On propose de calculer $S := \sum_{X,Y, \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X \cap Y)$.

1. Méthode 1 : En remarquant que $\sum_{X,Y, \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{X,Y, \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X \cap Y^c)$, calculer S.
2. Méthode 2. Pour toute partie Z de E à k éléments, rechercher le nombre de couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $X \cap Y = Z$. En déduire S.

Exercice 31.

1. Une personne descend un escalier une ou deux marches à la fois. Combien y a-t-il de telles manières de descendre cet escalier sachant qu'il y a n marches.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}$.

Exercice 32. Pour tout $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $E_{p,n} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p,\ x_1 + \dots + x_p = n\}$. On note $u_{p,n} = \operatorname{Card}(E_{p,n})$.

1. Montrer que pour tout $p \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} u_{p-1,k}$.
2. Montrer, à l'aide d'une bijection, que $u_{p,n}$ est égal au nombre de dispositions de $p-1$ cases noires parmi $n+p-1$ cases alignées. En déduire la valeur de $u_{p,n}$.
3. En déduire la formule de Pascal généralisée (voir plus haut).
4. Soit $F_{p,n} = \{(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p,\ x_1 + \dots + x_p = n\}$. Calculer $\operatorname{Card}(F_{p,n})$.
5. Combien y-at-il de façons de ranger n objets indiscernables dans p tiroirs différents ?

† *Les permutations*

Exercice 33. Quel est le cardinal de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui échangent exactement deux éléments (transpositions) ?

Exercice 34. Soit n un entier naturel non nul. Combien de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ont pas de points de fixe ? Combien de permutations $\mathfrak{S}_{100}$ ont un cycle de longueur ≥ 50 ?

Exercice 35. On appelle *dérangement* d'un ensemble fini E toute permutation de E ne laissant aucun élement invariant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n élément avec la convention $D_0 = 1$.

1. Donner D_1, D_2, D_3 et D_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
3. En déduire D_5. Cinq couples (mari et femme) de danseurs se rendent à un bal masqué. A l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes. On numérote ensuite hommes et femmes de 1 à 5. Ils s'élancent sur la piste de danse, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
   (a) Combien y-a-il de combinaisons possibles ?
   (b) Combien y-a-il de combinaisons possibles sans qu'aucun des couples initiaux ne soit reconstitué ?
   (c) Combien y-a-il de combinaisons possibles telles qu'un seul des couples initiaux soit reconstitué ?
   (d) Combien y-a-il de combinaisons possibles telles qu'une majorité des couples ne soit pas des couples initiaux ?
4. Montrer que pour tout n, $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
5. En déduire que le nombre de permutations de E laissant exactement p points invariants est $\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$.