TD 2 - Fonctions, équipotence

† *Fonctions*

Exercice 1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$ la composée.

1. On suppose h injective et f surjective. Montrer que g est injective.
2. On suppose h surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ une fonction. Montrer que

1. f est injective si et seulement si $f_* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ est injective.
2. f est surjective si et seulement si $f^* : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ est injective.

Exercice 3. Soit $f : E \to F$ une fonction. Montrer que

1. $f^*(\varnothing) = \varnothing$, $f^*(F) = E$.
2. $f_*(\varnothing) = \varnothing$, $f_*(E) \subset F$.
3. Soit I un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I,
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f_*(A_i) \text{ et } f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f_*(A_i).$$
4. Donner une fonction $f : E \to F$, ainsi que deux ensembles $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(F)$ tels que $f_*(A_1 \cap A_2) \neq f_*(A_1) \cap f_*(A_2)$.
5. Pour $B \subset F$, on a $f^*(B^c) = (f^*(B))^c$.

Exercice 4.

1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Écrire $\operatorname{Ker} f$ (resp. $\operatorname{Im} f$) sous la forme d'une image réciproque (resp. d'une image directe).
2. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. Écrire l'ensemble des racines de P sous la forme d'une image réciproque.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Démontrer que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^*(f_*(A))$;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(E)$, $f_*(f^*(B)) \subset B$.

Donner des hypothèses sur f pour avoir des égalités.

Exercice 6.

1. Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A\cap(A\cup B) = A$ et $A\cup(A\cap B) = A$ en utilisant les indicatrices.
2. Calculer $1_{A\Delta B}$.
3. En déduire que Δ est associative $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une fonction et $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $1_{f^*(B)} = 1_B \circ f$.

† *Équipotence*

Exercice 8. On considère les différentes relations suivantes. Pour chacune, dites si ce sont des relations d'équivalence :

1. E est un ensemble quelconque, et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$ dans E.
2. $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et $n\mathcal{R}m$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, m) \geqslant 2$.
3. X est un ensemble quelconque et $E = \mathcal{P}(X)$. On pose $A\mathcal{R}B$ si $A \cap B \neq \varnothing$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $x \leqslant y$.
5. $f : E \to F$ est une fonction, et $x\mathcal{R}x'$ si $f(x) = f(x')$.

Exercice 9.

1. Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$ et $2\mathbb{N}$.
2. Soit E un ensemble. Construire une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des fonctions $E \to \{0, 1\}$. Si E est fini de cardinal n, montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
3. Soit E un ensemble. Construire une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$$

Montrer que f est injective. Quel résultat du cours a-t-on retrouvé ?

Exercice 11. On rappelle que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que arctan induit une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est équipotent à $]0, 1[$.

Exercice 12.

1. Soient A un ensemble infini et D un ensemble dénombrable. Montrer que A et $A \cup D$ sont équipotents.
2. Soit A un ensemble indénombrable, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to A$ une fonction injective. Montrer que A et $A \setminus \varphi_*(\mathbb{N})$ sont équipotents.

Exercice 13.

1. L'ensemble $D = \{a + \sin b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est-il dénombrable ?
2. Existe-t-il une injection $f : \mathbb{R} \to D$?
3. En déduire l'existence d'un nombre réel qui n'est pas de la forme $a + \sin b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 14. On pose $P := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $I := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Préciser les ensembles $P \cup I$ et $P \cap I$.
2. Donner deux bijections $\varphi : \mathbb{N} \to P$ et $\psi : \mathbb{N} \to I$.
3. En déduire deux bijections $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(P)$ et $\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(I)$.
4. Montrer que l'on définit une bijection $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(P) \times \mathcal{P}(I)$ par la formule $f(A) = (A \cap P, A \cap I)$. On précisera la bijection réciproque f^{-1} par une formule donnant $f^{-1}(B, C)$ pour $(B, C) \in \mathcal{P}(P) \times \mathcal{P}(I)$.

5. En déduire une bijection $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
6. On admet que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $]0,1[$. Déduire l'existence d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 15.

1. Soit n un entier positif. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[X]_n$ des polynômes de degré au plus n est dénombrable. En déduire que l'ensemble $\bigcup_{n\geqslant 0} \mathbb{Q}[X]_n$ est dénombrable.
2. Prouver que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
3. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel non algébrique est dit *transcendant*. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
4. En déduire qu'il existe (une infinité indénombrable) de nombres transcendants dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16. On admet que toute suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ emboîtés (inclus les uns dans les autres) tel que la longueur des intervalles tend vers 0, vérifie $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = x$ où x est un unique réel de $[0,1]$. On souhaite montrer par l'absurde que $[0,1]$ est indénombrable.

1. On suppose que $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$ est la collection (dénombrable) des points de $[0,1]$. Pour tout intervalle $I = [a,b]$ de $[0,1]$, on le coupe en trois intervalles $I^1 = [a, a+(b-a)/3]$, $I^2 = [a+(b-a)/3, a+2(b-a)/3]$, $I^3 = [a+2(b-a)/3, b]$. Faire un dessin.
2. Montrer que l'on peut choisir I_1, de longueur $1/3$ qui ne contient pas x_1. Puis $I_2 \subset I_1$, de longueur $1/9$ qui ne contient pas x_2.
3. Expliquer comment construire une suite (I_n) d'intervalles tels que pour tout n, $\{x_1, \dots, x_n\} \cap I_n = \varnothing$.
4. Conclure.

Exercice 17.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'indénombrabilité de l'ensemble $[\![0, N]\!]^{\mathbb{N}}$ des suites entières bornées par N.
2. Même question avec l'ensemble des suites à valeurs entières qui sont strictement croissantes.

Exercice 18. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour $x \in I$, on pose

$$f^-(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) \text{ et } f^+(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ x<t}} f(t).$$

1. Soit $x \in I$. Montrer que $f^-(x) = \sup_{t<x} f(t)$ et que $f^+(x) = \inf_{t>x} f(t)$.
2. Soit $x \in I$. Montrer que $f^-(x) \leqslant f(x) \leqslant f^+(x)$, avec égalité si et seulement si f est continue en x.
3. À tout point de discontinuité x de f sur I, associer un rationnel $q(x) \in]f^-(x), f^+(x)[$. Montrer que la fonction $x \mapsto q(x)$ est injective.
4. En conclure que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

Exercice 19. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs (on peut toujours se ramener à ce cas là). On suppose que la somme de la famille est finie :

$$\exists L \geq 0,\ \forall J \subset I,\ J \text{ fini},\ \sum_{i\in J} a_j \leq L.$$

En déduire que I est dénombrable. On pourra pour cela fixer $k \in \mathbb{N}^*$ et regarder $J = \{i \in I, a_i \geq \frac{1}{k+1}\}$.

Exercice 20 (Cantor Bernstein, autre preuve)**.** Dans un premier temps, on considère un ensemble A et $B \in \mathcal{P}(A)$ et on suppose qu'il existe une injection $u : A \to B$. On considère $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{P}(A)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \begin{cases} A \setminus B & \text{si } n = 0, \\ u_*(C_{n-1}) & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Et on pose $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

1. Montrer que le complémentaire de C dans A est inclus dans B. Faire un dessin.
2. Montrer que l'on définit une fonction $v : A \to B$ en posant

$$v : x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } \ x \in C, \\ x & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

3. Montrer que v est injective. Montrer que v est surjective.
4. Qu'a-t-on montré par rapport à notre objectif ?
5. Soient maintenant $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. Soit $B = g_*(F)$. Montrer que $g \circ f$ est une injection entre F et B. Conclure en utilisant ce qui précède.