TD 1 - Rappels élémentaires sur les ensembles

Exercice 1.

1. Écrire l'ensemble $E_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ et } x > 0\}$ comme un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Caractériser l'ensemble $E_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 0\}$ géométriquement (est-ce un cercle ? un point ? une droite ? une parabole ? le cône tangent d'une hypersurface algébrique de genre 15 ?). Même question avec l'ensemble $E_2' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$. (bonus : décrire E_2' comme l'image d'une courbe paramétrée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$).
3. Écrire l'ensemble $E_3 := \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ comme un intervalle de $\mathbb{R}$. Même question avec l'ensemble $E_3' := \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$.
4. Décrire l'ensemble $E_4 := \{(x+1, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ comme le graphe d'une fontion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Caractériser l'ensemble E_4 géométriquement.

Exercice 2.

1. Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.
2. Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Calculer $\mathcal{P}(\{E\})$ et $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 3. On appelle borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants de cette partie dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on le note $\sup A$ (de même, la borne inférieure $\inf A$ est le plus grand des minorants).

1. Dans un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$, redonner la définition d'un majorant d'une partie $F \subset E$ (en la quantifiant) et d'un minorant d'une partie $F \subset E$.
2. Calculer $\sup \mathbb{R}$ et $\inf \mathbb{R}$.
3. Calculer $\sup[0, 1]$ et $\sup[0, 1[$.
4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, montrer que $\inf A \leq \sup A$.
5. Calculer $\inf \varnothing$ et $\sup \varnothing$.

Exercice 4. Soit X un ensemble. On considère $\mathcal{P}_f$ comme l'ensemble des parties finies de X, ainsi qu'un ensemble $E \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_f)$ formé de parties finies de X.

1. Rappeler pourquoi l'union $\bigcup_{A \in E} A$ est une partie de X.
2. Si E est fini, montrer que $\bigcup_{A \in E} \in \mathcal{P}_f$ (on dit que $\mathcal{P}_f$ est stable par union finie).
3. Trouver un exemple où E est infini et où $\bigcup_{A \in E} \notin \mathcal{P}_f$.
4. Trouver un exemple où E est infini et où $\bigcup_{A \in E} \in \mathcal{P}_f$.

Exercice 5. Soit X un ensemble.

1. Soit $B \subset X$. Montrer que le complémentaire B^c de B dans X est un sous-ensemble de X.
2. Soit maintenant $E \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble formé de parties de X. Montrer les règles classiques :

$$\left(\bigcap_{A \in E} A\right)^c = \bigcup_{A \in E} A^c \text{ et } \left(\bigcup_{A \in E} A\right)^c = \bigcap_{A \in E} A^c.$$

Exercice 6. Étant donné l'ensemble vide $\varnothing$ et l'opération de réunion sur les ensembles, définir pour tout n un ensemble de cardinal n. Donner une définition possible de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer que dans un espace vectoriel E, tout sous-espace vectoriel P admet un supplémentaire P' (autrement dit $P \oplus P' = E$, ce qui signifie que tout élément de E écrit de manière unique comme la somme d'un élément de P et d'un élément de P'). Pour cela, on considère l'ensemble Ω des sous espaces vectoriels Q de E tels que $P \cap Q = \{\vec{0}\}$ (l'intersection est réduite au vecteur nul).

1. Montrer que la relation $Q_1 \subset Q_2$ est une relation d'ordre sur Ω.
2. On considère une chaîne de Ω (sous-ensemble totalement ordonné), autrement dit il existe un ensemble I muni d'un ordre $\preccurlyeq$ et une collection $(Q_i)_{i\in I}$ d'éléments de Ω indexés par I telle que $i \preccurlyeq i'$ implique $Q_i \subset Q_{i'}$. Montrer que $\cup_{i\in I} Q_i$ est un majorant la chaîne (attention à ne pas oublier une vérification).
3. Soit P' un élément maximal de Ω. Montrer que $P + P' = E$ (on pourra raisonner par l'absurde, prendre $v \in E \backslash (P + P')$ et considérer un espace P'' plus grand que P' dans Ω, ce qui contredirait la maximalité de P'). Conclure.

Exercice 8. On considère les différentes relations suivantes. Pour chacune, dites si ce sont des relations d'ordre et si oui, dites si elles sont totales :

1. E est un ensemble quelconque, et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$ dans E.
2. $E = \mathbb{N}$ et $n\mathcal{R}m$ si et seulement si $n|m$ (n divise m).
3. $E = \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble X, et $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.
4. $E = \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble fini X, et $A\mathcal{R}B$ si et seulement si A a moins d'élément que B.
5. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \leqslant y$.
6. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x < y$.
7. $E = \mathbb{R}^2$, et $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement si $x < x'$ ou si $x = x'$ et $y \leqslant y'$.
8. $E = \mathbb{C}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $|x| \leqslant |y|$.