Correction séances 1 et 2 (19,26 septembre)

Exercice 1. 1. Par définition, l'ensemble E_1 est l'intervalle $]0,1]$, formé des réels strictement supérieurs à 0 et inférieurs à 1.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La formule $(x-1)^2 + y^2$ donne le carré de la distance entre le point (x,y) et le point $(1,0)$. L'ensemble E_2 est donc formé des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dont le carré de la distance avec le point $(1,0)$ est nulle. Comme $z^2 = 0$ entraîne $z = 0$, on en déduit que E_2 est l'ensemble des points à distance nulle du point $(1,0)$. Cet ensemble est donc réduit à $\{(1,0)\}$. L'ensemble E_2' quant à lui est formé des points dont (le carré de) la distance avec le point $(1,0)$ est 1. Il s'agit d'un cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1. Bonus : l'ensemble E_2' est décrit comme l'image de la courbe paramétrée

$$f : t \mapsto (1 + \cos(t), \sin(t)).$$

3. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $E_3 \subset [-1,1]$. On cherche à montrer l'inclusion réciproque. On sait que $\sin(-\pi/2) = -1$ et que $\sin(\pi/2) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve qu'il existe un $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(x) = t$. En particulier, on a $t \in E_3$. Comme ceci est vrai pour tout $t \in [-1,1]$, on trouve $[-1,1] \subset E_3$ et donc $[-1,1] = E_3$.
Soit $A := \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, de sorte que $E_3' = \{\sin(x) \mid x \in A\}$. Comme $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$E_3' = \sin(A) \subset \sin(\mathbb{R}) = E_3 = [-1,1].$$

On montre ensuite que $-1 \notin E_3'$. On sait (cercle trigonométrique) que les solutions de l'équation $\sin(x) = -1$ sont exactement les $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Comme ces éléments n'appartiennent pas à A, on a $-1 \notin \sin(A) = E_3'$. De même, on trouve que $1 \notin E_3'$. On a donc $E_3' \subset]-1,1[$. Pour prouver l'inclusion réciproque, soit $t \in]-1,1[$. On a vu précédemment qu'il existe $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(x) = t$. Comme $\sin(-\pi/2) = -1 \neq t$ et $\sin(\pi/2) = 1 \neq t$, on trouve $x \neq \pm\pi/2$ et donc $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme la distance entre x et $\pi/2$ est strictement inférieure à π, on obtient $x \in A$ et donc $\sin(x) = t \in E_3'$. Comme ceci est vrai pour tout $t \in]-1,1[$, on trouve $]-1,1[\subset E_3'$ et donc $]-1,1[= E_3'$.
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, on a $(a,b) \in E_4$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} a = x+1, \\ b = x \end{cases} \Leftrightarrow a = b+1 \Leftrightarrow b = a-1.$$

L'ensemble E_4 est alors donné par $\{(a, a-1) \mid a \in \mathbb{R}\}$, c'est à dire par le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(a) = a - 1$.

Exercice 2. 1. On montre que le seul sous-ensemble de $\varnothing$ est $\varnothing$ lui même. On a $\varnothing \subset \varnothing$ car $\varnothing$ est inclus dans tout ensemble. Ensuite, pour X un ensemble non vide, on peut considérer $x \in X$. On a $x \notin \varnothing$ et donc $X \not\subset \varnothing$. L'ensemble $\mathcal{P}(\varnothing)$ contient donc un unique élément, étant $\varnothing$ lui-même. On a donc $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (cet ensemble n'est pas égal à $\varnothing$).

Pour la culture, donnons une preuve plus formelle du même fait : Soit X un ensemble, par définition, on a

$$\begin{aligned} X \subset \varnothing \Leftrightarrow & \forall x \in X,\ x \in \varnothing \\ & \forall x [x \in X \Rightarrow x \in \varnothing] \\ & \forall x \neg(x \in X) \vee (x \in \varnothing) \end{aligned}$$

Comme $\varnothing$ ne contient aucun élément, $x \in \varnothing$ est toujours faux. L'assertion $\neg(x \in X) \vee (x \in \varnothing)$ est vraie si et seulement si $\neg(x \in X)$ est vraie, i.e. si $x \in X$ est faux. On a donc

$$X \subset \varnothing \Leftrightarrow \forall x,\ x \notin X \Leftrightarrow X = \varnothing$$

d'où $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Ensuite, on a $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ contient 1 élément. Une partie de $\mathcal{P}(\varnothing)$ contient donc 0 où 1 élément. Une partie à 0 éléments de $\mathcal{P}(\varnothing)$ est forcément $\varnothing$ (l'unique ensemble à 0 éléments). Une partie à 1 éléments de $\mathcal{P}(\varnothing)$ admet l'unique élément de $\mathcal{P}(\varnothing)$ comme élément, l'unique partie à 1 élément de $\mathcal{P}(\varnothing)$ est donc $\mathcal{P}(\varnothing)$ lui-même. On a donc $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Comme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ contient 2 éléments. Il y a trois possibilités pour une partie X de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$:
- X a 0 éléments, alors $X = \varnothing$
- X a 1 élément, alors $X = \{\varnothing\}$ ou $X = \{\{\varnothing\}\}$ car $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$ sont les seuls éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.
- X a 2 éléments, alors $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ car $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ contient lui-même 2 éléments.

On a alors

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

On peut résumer cet ensemble dans le diagramme d'inclusion suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} & \\
\{\varnothing\} \arrow[ur] & & \{\{\varnothing\}\} \arrow[ul] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(évidemment, on a aussi $\varnothing \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, mais on retrouve cette inclusion par exemple en faisant $\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$).

2. l'ensemble E contient 3 éléments, il y a donc quatre possibilités pour une partie X de E :
- X a 0 éléments, alors $X = \varnothing$
- X a 1 élément, alors $X = \{0\}$ ou $X = \{1\}$ ou $X = \{2\}$ car $0, 1, 2$ sont les éléments de E.
- X a 2 éléments, alors X contient tous les éléments de E sauf 1, donc soit $X = \{1, 2\}$, soit $X = \{0, 2\}$, soit $X = \{0, 1\}$.
- X a 3 éléments, alors $X = E$ car E contient lui-même 3 éléments.

On a alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

On peut résumer cet ensemble dans le diagramme d'inclusion suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\} & \\
\{0,1\} \arrow[ur] & \{0,2\} \arrow[u] & \{1,2\} \arrow[ul] \\
\{0\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{1\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 3. On pose $\overline{\mathbb{R}} = \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$ (avec l'ordre évident).

1. Un élément $x \in E$ est un majorant de F si l'on a

$$\forall y \in F, y \leqslant x.$$

De même, x est un minorant de F si
$$\forall y \in F, x \leqslant y.$$
2. Pour calculer le supremum de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on commence par calculer l'ensemble des majorants de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Premièrement, $-\infty$ n'est pas un majorant de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ car $0 \in \mathbb{R}$ est tel que $0 \nleqslant -\infty$. Ensuite, aucun élément de $\mathbb{R}$ n'est un majorant de $\mathbb{R}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, l'élément $x+1 \in \mathbb{R}$ est tel que $x+1 \nleqslant x$. Enfin, $+\infty$ est un majorant de $\mathbb{R}$ car c'est le maximum de $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, l'ensemble des majorants de $\mathbb{R}$ est $\{+\infty\}$. Comme cet ensemble contient un unique élément, son minimum est évidemment $+\infty$, qui est alors le supremum de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour calculer l'infimum de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on commence par calculer l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Premièrement, $+\infty$ n'est pas un minorant de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ car $0 \in \mathbb{R}$ est tel que $-\infty \nleqslant 0$. Ensuite, aucun élément de $\mathbb{R}$ n'est un minorant de $\mathbb{R}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, l'élément $x-1 \in \mathbb{R}$ est tel que $x \nleqslant x-1$. Enfin, $-\infty$ est un minorant de $\mathbb{R}$ car c'est le minimum de $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}$ est $\{-\infty\}$. Comme cet ensemble contient un unique élément, son maximum est évidemment $+\infty$, qui est alors l'infimum de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
3. Premièrement, $1 \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un majorant de $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \text{ et } x \leqslant 1\}$ par définition. Soit ensuite un majorant m de $[0,1]$. Comme $1 \in [0,1]$, on a $1 \leqslant m$ par définition d'un majorant. L'élément 1 est donc inférieur à tous les majorants de $[0,1]$, il s'agit donc du supremum de $[0,1]$.
Ensuite, $1 \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un majorant de $[0,1[$, là encore par définition. Ensuite, soit $m < 1$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'élément $x := \max(0, m+1/2)$ est un élément de $[0,1[$ tel que $m < x$, donc m n'est pas un majorant de $[0,1[$. Par contraposée, on obtient que tout majorant m de $[0,1[$ est tel que $1 \leqslant m$. Comme 1 est un majorant de $[0,1[$, on conclut qu'il s'agit du plus petit des majorants, et donc du supremum de $[0,1[$.
4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $x \in A$. Comme $\inf A$ est un minorant de A, on a $\inf A \leqslant x$. De même, comme $\sup A$ est un majorant de x, on a $x \leqslant \sup A$. On a alors $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, et donc en particulier $\inf A \leqslant \sup A$.
5. Avant de calculer infimum et supremum de $\varnothing$, nous commençons par calculer les majorants et les minorants de $\varnothing$. La définition d'un majorant de $\varnothing$ est un $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que
$$\begin{aligned}\forall y \in \varnothing, y \leqslant x &\Leftrightarrow \forall y[y \in \varnothing \Rightarrow y \leqslant x] \\ &\Leftrightarrow \forall y[\neg(y \in \varnothing) \vee (y \leqslant x)].\end{aligned}$$
Comme $\neg(y \in \varnothing)$ est vrai pour tout y, l'assertion ci dessus est vraie pour tout y, et donc x est un majorant de $\varnothing$. L'ensemble des majorants de $\varnothing$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est donc $\overline{\mathbb{R}}$ lui-même, dont le minimum est $-\infty$, qui est donc le supremum de $\varnothing$. De même, l'ensemble des minorants de $\varnothing$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$, et $\inf \varnothing = \{+\infty\}$.

Exercice 8. 1. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. En effet on a :
- Réflexivité : soit $x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$ puisque $x = x$.
- Antisymétrie : soient $x, y \in E$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Par définition, on a $x = y$ et $y = x$, et donc $x = y$ en particulier.
- Transitivité : soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Par définition, on a $x = y$ et $y = z$, et donc $x = z$ en particulier, soit $x\mathcal{R}z$.

Pour que la relation $\mathcal{R}$ soit totale, il faut et il suffit que, pour tout $x, y \in E$, on ait $x\mathcal{R}y$ où $y\mathcal{R}x$. Autrement dit, pour tout $x, y \in E$, $x = y$ ou $y = x$ (i.e. $x = y$). Ceci arrive si et seulement si E contient au plus un unique élément.

2. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. En effet on a :
   - Réflexivité : soit $x \in \mathbb{N}$, on a $x\mathcal{R}x$ puisque $x = 1 \times x$.
   - Antisymétrie : soient $x, y \in \mathbb{N}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Par définition, il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = ky$ et $y = k'x$. On a alors $x = kk'x$. On a deux cas de figure :
     - soit $x = 0$ et alors $y = 0 = x$
     - soit $x \neq 0$ et alors $kk' = 1$, ce qui entraîne $k = k' = 1$ car $k, k' \in \mathbb{N}$.

     Dans les deux cas, on a $x = y$ en particulier.
   - Transitivité : soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Par définition, il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = ky$ et $y = k'z$. On a alors $x = kk'z$ et $x\mathcal{R}z$ par définition.

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas totale. En effet, $2, 3$ sont deux entiers sans que $2|3$ ou que $3|2$.

3. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. En effet on a :
   — Réflexivité : soit $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A\mathcal{R}A$ puisque $A = A$.
   — Antisymétrie : soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$, tels que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$. Par définition, on a $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$ par principe de double inclusion.
   — Transitivité : soient $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Par définition, on a $A \subset B$ et $B \subset C$, et donc $A \subset C$ en particulier, soit $A\mathcal{R}C$.

   Pour que la relation $\mathcal{R}$ soit totale, il faut et il suffit que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on ait $A\mathcal{R}B$ où $B\mathcal{R}A$. Si X contient au moins 2 éléments $\{x\}, \{y\}$, et on a $\neg(\{x\} \subset \{y\})$ et $\neg(\{y\} \subset \{x\})$, donc la relation n'est pas totale. Si X contient un élément ou moins, la relation $\mathcal{R}$ est totale.

4. Si X contient un élément ou moins, la relation $\mathcal{R}$ est en fait la même que celle de la question précédente, et il s'agit d'une relation d'ordre totale sur $\mathcal{P}(X)$. Si X contient deux éléments distincts x, y, alors on a $\{x\}\mathcal{R}\{y\}$ et $\{y\}\mathcal{R}\{x\}$ sans avoir $\{x\} = \{y\}$. La relation $\mathcal{R}$ n'est donc pas antisymmétrique, et il ne s'agit pas d'une relation d'ordre.

5. La relation $\mathcal{R}$ est un ordre total : c'est la relation d'ordre classique sur les réels.

6. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive : on a par exemple $0 \not< 0$. Ce n'est donc pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

7. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. En effet on a :
   — Réflexivité : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x = x$ et $y \leqslant y$, donc $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$.
   — Antisymétrie : soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, tels que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$. On peut faire de nombreuses disjonctions de cas, où revenir aux quantificateurs. Par définition, on a

$$\begin{aligned}(x, y)\mathcal{R}(x', y') &\Leftrightarrow (x < x') \vee (x = x' \wedge y \leqslant y') \\ &\Leftrightarrow ((x < x') \vee (x = x')) \wedge (x < x' \vee y \leqslant y') \\ &\Leftrightarrow (x \leqslant x') \wedge (x < x' \vee y \leqslant y')\end{aligned}$$

   et de même,

$$(x', y')\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow (x' \leqslant x) \wedge (x' < x \vee y' \leqslant y).$$

   On a alors la chaîne d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}&(x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x, y) \\ \Leftrightarrow&(x \leqslant x') \wedge (x < x' \vee y \leqslant y') \wedge (x' \leqslant x) \wedge (x' < x \vee y' \leqslant y) \\ \Leftrightarrow&(x \leqslant x') \wedge (x' \leqslant x) \wedge (x < x' \vee y \leqslant y') \wedge (x' < x \vee y' \leqslant y) \\ \Leftrightarrow&(x = x') \wedge (x < x' \vee y \leqslant y') \wedge (x' < x \vee y' \leqslant y) \\ \Leftrightarrow&(x = x') \wedge (y \leqslant y') \wedge (y' \leqslant y) \\ \Leftrightarrow&(x = x') \wedge (y = y') \\ \Leftrightarrow&(x, y) = (x', y').\end{aligned}$$

   On a donc l'antisymétrie de la relation $\mathcal{R}$.
   — Transitivité : soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$. Cette fois ci, faisont les disjonctions de cas :
     — Si $x < x'$ et $x' < x''$, alors $x < x''$ et donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.
     — Si $x < x'$ et $(x' = x'' \wedge y' \leqslant y'')$, alors $x < x''$ et donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.
     — Si $(x = x' \wedge y \leqslant y')$ et $x' < x''$, alors $x < x''$ et donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.
     — Si $(x = x' \wedge y \leqslant y')$ et $(x' = x'' \wedge y' \leqslant y'')$, alors $x = x''$ et $y \leqslant y''$ et donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.

     Dans tous les cas, on obtient $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$ et donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est totale. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathcal{R}$. On a

$$\begin{aligned}
&(x,y)\mathcal{R}(x',y') \vee (x',y')\mathcal{R}(x,y)\\
\Leftrightarrow &(x < x') \vee (x = x' \wedge y \leqslant y') \vee (x' < x) \vee (x' = x \wedge y' \leqslant y)\\
\Leftrightarrow &(x < x') \vee (x' < x) \vee (x = x' \wedge y \leqslant y') \vee (x' = x \wedge y' \leqslant y)\\
\Leftrightarrow &(x \neq x') \vee (x = x' \wedge y \leqslant y') \vee (x = x' \wedge y' \leqslant y)\\
\Leftrightarrow &(x \neq x') \vee (x = x') \vee (y \leqslant y' \wedge y' \leqslant y)\\
\Leftrightarrow &(x \neq x') \vee (x = x')
\end{aligned}$$

Cette dernière équivalence provenant du fait que l'ordre naturel est total sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que $(y \leqslant y' \wedge y' \leqslant y)$ est toujours vrai. Comme la dernière assertion obtenue est toujours vraie, la première l'est également, et donc l'ordre $\mathcal{R}$ est un ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

8. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas antisymmétrique : par exemple $1, -1 \in \mathbb{C}$ sont tels que $|-1| \leqslant |1|$ et $|1| \leqslant |-1|$ sans avoir $1 = -1$. La relation $\mathcal{R}$ n'est en particulier pas une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.