# Correction examen session 1 sujet B 2024-2025

**Exercice 1.**

1. Pour tout réel $x$, on a $3x+1 \in \mathbb{R}$ et donc $-1 \leqslant \cos(3x+1) \leqslant 1$. Comme $e^{-2x}$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$-e^{-2x} \leqslant e^{-2x}\cos(3x+1) \leqslant e^{-2x}.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to+\infty} -e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on déduit que la limite considérée vaut 0.

2. Pour tout réel $x$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Comme $1/x$ est positif pour $x$ assez grand (en particulier pour $x \to +\infty$), on a alors

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on déduit que la limite considérée vaut 0.

3. Pour tout réel $c$, on a

$$c^4 - 2c^2 - 2 = 2c \Leftrightarrow c^4 - 2c^2 - 2c - 2 = 0.$$

On considère alors la fonction $f$ définie par $f(c) = c^4 - 2c^2 - 2c - 2$. Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme, et donc en particulier définie et continue sur $[1,3]$. On calcule alors

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 2 - 2 - 2 = -5 < 0, \\ f(3) = 81 - 2\times 9 - 2\times 3 - 2 = 81 - 18 - 6 - 2 = 55 > 0. \end{cases}$$

Comme $f$ est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient qu'il existe au moins un réel $c \in [1,3]$ tel que $f(c) = 0$, ce qui répond à la question.

**Exercice 2.**

1. La fonction donnée est de la forme $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 - x - 12$. Il s'agit en particulier d'une fonction dérivable en tout point de son domaine de définition, c'est à dire en tout $x$ tel que $u(x) \neq 0$ (donc $x \neq 3, 4$). Pour calculer la dérivée, on utilise la formule

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$$

En sachant que $u'(x) = 2x - 1$, on a alors

$$f'(x) = -\frac{2x-1}{x^2-x-12} = \frac{1-2x}{x^2-x-12}.$$

en tout point du domaine de définition de $f$, ce qui vaut alors pour $x > 4$.

2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, donc $3e^x > 0 > -2$. Tout réel $x$ est donc une solution de cette inéquation. ATTENTION : on peut reformuler l'inéquation par $e^x > \frac{-2}{3}$. On a alors envie d'appliquer ln, ce qui n'est pas valide car on devrait calculer le logarithme de $\frac{-2}{3} < 0$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\ln(\sqrt{x}) + 7 = -2 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x}) = -9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = e^{-9} \Leftrightarrow x = e^{-18}.$$

**Exercice 3.**

1. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car à toute valeur de $x$ est associée un nombre $f(x)$ bien défini :
   - Si $|x| < 1$, autrement dit si $x \in ]-1,1[$, alors $1 - x^2 > 0$, et en particulier $\sqrt{1-x^2}$ est défini.
   - Si $|x| > 1$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ est bien défini (cette formule est même théoriquement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque c'est un polynôme).

2. Au voisinage de tout point de l'intervalle $]-\infty,-1[$, la fonction $f$ est donnée par la formule polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction $f$ est donc continue sur cet intervalle indépendamment des valeurs de $a, b$ et $c$. De même, $f$ est continue sur l'intervalle $]1,+\infty$ indépendamment des valeurs de $a, b$ et $c$. Sur $]-1,1[$, la fonction $f$ est définie par la formule $\sqrt{1-x^2}$, qui donne une fonction continue sur cet intervalle par composition (la racine et continue, et $1 - x^2$ est polynomiale donc continue).

Les seuls point restants sont 1 et $-1$. Pour que $f$ soit continue en $-1$, il faut et il suffit d'avoir

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(1).$$

On a $f(1) = a - b + c$ et

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} ax^2 + bx + c = a - b + c \text{ et } \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0.$$

La fonction $f$ est donc continue en $-1$ si et seulement si $a - b + c = 0$. De la même manière, on obtient que $f$ est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + c = f(1) = a + b + c.$$

Au final, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0, \\ b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c, \\ b = 0. \end{cases}$$

**Exercice 4.**

1. La fonction $[x \mapsto 2(x-1)]$ est polynomiale, donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, on sait (fonction de référence) que $[x \mapsto e^{-x}]$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme, on obtient que $f$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} = ]-\infty,+\infty[$.

2. Les bornes du domaine de définition de $f$ sont $-\infty$ et $+\infty$. Pour $x$ assez petit, on a

$$2(x-1) + e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{2x^x}{e} - 2e^x + 1\right)$$

Quand $x$ tend vers $-\infty$, $2e^x$ tend vers 0, de même que $2xe^x$ (par croissance comparée, $e^x$ l'emporte sur $x$). On a donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{2x^x}{e} - 2e^x + 1\right) = +\infty.$$

Pour $x \to +\infty$ c'est plus simple : on a

$$\lim_{x\to+\infty} 2(x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

Par somme, on obtient alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour $x$ assez grand (en particulier pour $x \to +\infty$), on a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{4x} = \frac{e^x}{x}\frac{1 - e^{-2x}}{4}.$$

On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{4} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x},$$

la deuxième limite étant obtenue par croissance comparée. Par produit, on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{4x} = +\infty.$$

4. Pour savoir si $f$ est paire ou impaire, on calcule

$$f(-x) = 2(-x-1) + e^{-(-x)} = -2(x+1) + e^x.$$

On voit que ceci ne semble être égal ni à $f(x)$, ni à $-f(x) = -2(x-1) - e^{-x}$. Pour être sur que $f$ n'est ni paire ni impaire, on exhibe un contre exemple explicite : Pour $x = 1$, on a

$$f(1) = 2(1-1) + e^{-1} = e^{-1} \text{ et } f(-1) = 2(-1-1) + e^1 = -4 + e^1$$

comme $f(1) \neq f(-1)$ et $f(1) \neq -f(-1)$, on trouve que $f$ n'est ni paire ni impaire.

5. On a vu à la question 1 pourquoi $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On calcule la dérivée de $f$ en utilisant la formule pour les sommes, la formule pour les polynômes, et la formule pour l'exponentielle :

$$f'(x) = 2 - e^{-x}.$$

6. Pour établir le tableau de variations de $f$, on établit le tableau de signes de la dérivée $f'$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 > e^{-x} \Leftrightarrow \ln(2) > -x \Leftrightarrow -\ln(2) < x.$$

On a donc que $f'$ est négative sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et positive sur $[\ln(2), +\infty[$. On a

$$f(-\ln(2)) = -2\ln(2) - 2 + e^{\ln(2)} = -2\ln(2) - 2 + 2 = -2\ln(2) \approx -1,4.$$

On obtient alors le tableau de signes/variations suivant (les limites proviennent de la question 2.) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2\ln(2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

7. Pour que le graphe de $f$ admette des asymptotes horizontales, il faudrait que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ ou en $-\infty$ soit un nombre réel. D'après la question 2. ce n'est pas le cas, donc le graphe de $f$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

8. Pour que le graphe de $f$ admette des asymptotes verticales, il faudrait que la limite de $f(x)$ en un certain $a \in \mathbb{R}$ soit infinie. Comme $f$ est définie et continue en tout point de $\mathbb{R}$, la limite de $f(x)$ en un certain $a \in \mathbb{R}$ est finie et vaut $f(a)$, donc le graphe de $f$ n'admet pas d'asymptotes verticales.

9. Pour démontrer que la droite d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique au graphe de $f$ en $+\infty$, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} 2x - 2 + e^{-x} - 2x + 2 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

Comme la limite de $f(x) - y$ en $+\infty$ est bien nulle, on obtient que la droite d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique au graphe de $f$ en $+\infty$. En $-\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} 2x - 2 + e^{-x} - 2x + 2 = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty.$$

Comme cette dernière limite n'est pas nulle, on trouve que la droite d'équation $y = 2x-2$ n'est pas une asymptote oblique au graphe de $f$ en $-\infty$.

10.

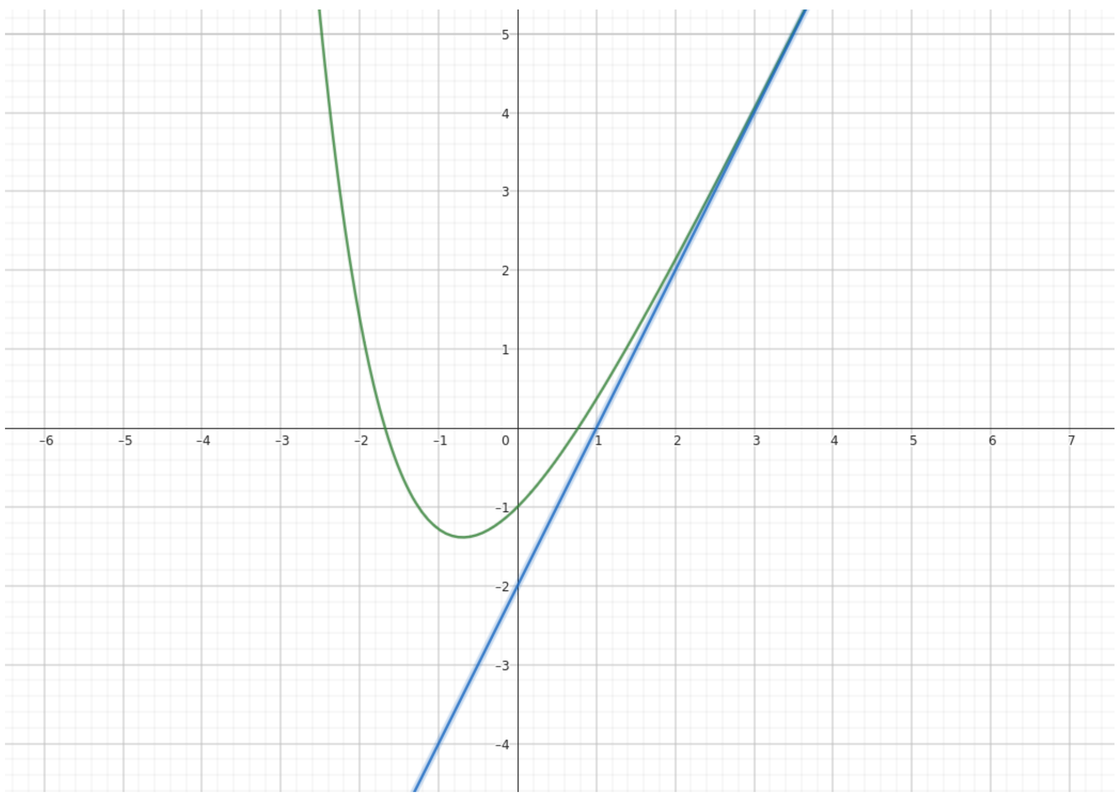


FIGURE 1 – Graphe de $f$