Correction examen session 1 sujet A 2024-2025

Exercice 1.

1. Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Comme $1/x$ est positif pour x assez grand (en particulier pour $x \to +\infty$), on a alors

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on déduit que la limite considérée vaut 0.

2. Pour x différent de 0, on a

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}.$$

Il s'agit là du taux d'accroissement en 0 de la fonction cosinus. On sait que la limite quand x tend vers 0 de ce taux d'accroissement est la valeur de la dérivée de cosinus en 0. Comme $\cos' = -\sin$, on trouve que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = -\sin(0) = 0.$$

Autre méthode (un peu tautologique) : on sait que $\cos(0) = 1$, donc la limite considérée est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$, sur laquelle on peut utiliser la règle de l'Hôpital. La dérivée de $\cos(x) - 1$ est $-\sin$, et la dérivée de x est 1. Par la règle de l'Hôpital nous donne donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{1} = -\sin(0) = 0.$$

3. Pour tout réel c, on a

$$c^4 - 2c^2 - 1 = c \Leftrightarrow c^4 - 2c^2 - c - 1 = 0.$$

On considère alors la fonction f définie par $f(c) = c^4 - 2c^2 - c - 1$. Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme, et donc en particulier définie et continue sur $[0, 2]$. On calcule alors

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0, \\ f(2) = 16 - 2 \times 4 - 2 - 1 = 5 > 0. \end{cases}$$

Comme f est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient qu'il existe au moins un réel $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = 0$, ce qui répond à la question.

Exercice 2.

1. La fonction donnée est de la forme $f(x) = (u(x))^3$, avec $u(x) = x^2 - 3x + 10$. Il s'agit en particulier d'une fonction dérivable en tout point de son domaine de définition, c'est à dire sur $\mathbb{R}$ (la fonction est polynomiale). Pour calculer la dérivée, on utilise la formule

$$f'(x) = 3u'(x)(u(x))^2$$

En sachant que $u'(x) = 2x - 3$, on a alors

$$f'(x) = 3(2x-3)(x^2 - 3x + 10)^2.$$

en tout point du domaine de définition de f, ce qui vaut alors pour $x > 0$ en particulier.

2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, donc $-7e^x < 0 < 1$. Tout réel x est donc une solution de cette inéquation. ATTENTION : on peut reformuler l'inéquation par $e^x > \frac{-1}{7}$. On a alors envie d'appliquer ln, ce qui n'est pas valide car on devrait calculer le logarithme de $\frac{-1}{7} < 0$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2\ln(x) + 5 = -1 \Leftrightarrow 2\ln(\sqrt{x}) = -6 \Leftrightarrow \ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}.$$

Exercice 3.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car à toute valeur de x est associée un nombre $f(x)$ bien défini :
   - Si $|x| < 1$, autrement dit si $x \in]-1,1[$, alors $1 - x^2 > 0$, et en particulier $\sqrt{1-x^2}$ est défini.
   - Si $|x| > 1$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ est bien défini (cette formule est même théoriquement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque c'est un polynôme).

2. Au voisinage de tout point de l'intervalle $]-\infty, -1[$, la fonction f est donnée par la formule polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction f est donc continue sur cet intervalle indépendamment des valeurs de a, b et c. De même, f est continue sur l'intervalle $]1, +\infty$ indépendamment des valeurs de a, b et c. Sur $]-1,1[$, la fonction f est définie par la formule $\sqrt{1-x^2}$, qui donne une fonction continue sur cet intervalle par composition (la racine et continue, et $1 - x^2$ est polynomiale donc continue).

Les seuls point restants sont 1 et -1. Pour que f soit continue en -1, il faut et il suffit d'avoir

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(1).$$

On a $f(1) = a - b + c$ et

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} ax^2 + bx + c = a - b + c \text{ et } \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0.$$

La fonction f est donc continue en -1 si et seulement si $a - b + c = 0$. De la même manière, on obtient que f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + c = f(1) = a + b + c.$$

Au final, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0, \\ b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c, \\ b = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.

1. La fonction $[x \mapsto x+1]$ est polynomiale, donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, on sait (fonction de référence) que $[x \mapsto \ln(1 - \frac{1}{x})]$ est définie si et seulement si la formule $1 - \frac{1}{x}$ est définie et strictement positive. On sait que $1 - \frac{1}{x}$ est définie si et seulement si $x \neq 0$. Ensuite, on a

$$1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x}.$$

Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0 < 1$. Si $x > 0$, alors l'inéquation ci-dessus est équivalente à $x > 1$. On trouve donc que la fonction $[x \mapsto \ln(1 - \frac{1}{x})]$ est définie sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Par somme, on obtient donc que la fonction f est définie sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

2. Les bornes du domaine de définition de f sont $-\infty$, 0^-, 1^+ et $+\infty$.
   - En $-\infty$. On sait que

     $$\lim_{x\to -\infty} x + 1 = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

     Par continuité du logarithme, et par somme, on a alors

     $$\lim_{x\to -\infty} x + 1 - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

     car $\ln(1) = 0$.

— En 0^-, on a

$$\lim_{x\to 0^-} x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} 1-\frac{1}{x} = +\infty.$$

Par continuité du logarithme, et par somme, on a alors

$$\lim_{x\to -\infty} x+1-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

car $\lim_{y\to +\infty} -\ln(y) = -\infty$.

— En 1^+, on a

$$\lim_{x\to 1^+} x+1 = 2 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} 1-\frac{1}{x} = 0^+.$$

Par continuité du logarithme, et par somme, on a alors

$$\lim_{x\to -\infty} x+1-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

car $\lim_{y\to 0^+} -\ln(y) = +\infty$.

— En $+\infty$. On sait que

$$\lim_{x\to +\infty} x+1 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} 1-\frac{1}{x} = 1.$$

Par continuité du logarithme, et par somme, on a alors

$$\lim_{x\to +\infty} x+1-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

car $\ln(1) = 0$.

3. Le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0. En effet, on sait que f est définie en $-0,5$ et pas en $0,5$. En particulier, f ne peut être ni paire ni impaire.

4. Sur chacun des intervalles donnés (dont la réunion donne le domaine de définition de f), on peut écrire $f(x) = u(x) - \ln(v(x))$, avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = 1-\frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables en tout point de leur domaine de définition (fonctions de références). Comme le logarithme est dérivable en tout point de son domaine de définition, on obtient par somme que f est dérivable en tout point des intervalles $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$. Ensuite, on a

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x^2},$$

En appliquant la formule des sommes et la formule des composées pour la composition, on obtient alors que la dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = u'(x) - \frac{v'(x)}{v(x)} = 1 - \frac{1/x^2}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x^2-x} = \frac{x^2-x-1}{x^2-x}.$$

5. On effectue un calcul direct

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= x\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\ &= x^2 - x\frac{1-\sqrt{5}}{2} - x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\ &= x^2 - x\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}\\ &= x^2 - x\frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-5}{4}\\ &= x^2 - x - 1.\end{aligned}$$

6. Pour établir le tableau de variations de f, on établit le tableau de signes de f'. On pose $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On sait que $2^2 < 5 < 3^2$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$. Ainsi, $\alpha < 0$ et $1 < \beta$. Ensuite, en utilisant les deux questions précédentes on obtient

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x(x-1)}.$$

En utilisant la règle des produits pour les signes, on obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\beta$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'après ce tableau de signes, on retrouve facilement le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les entrées de ce tableau sont les limites calculées dans la question 2.

7. Pour que le graphe de f admette des asymptotes horizontales, il faudrait que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ ou en $-\infty$ soit un nombre réel. D'après la question 2. ce n'est pas le cas, donc le graphe de f n'admet pas d'asymptote horizontale.

8. Pour que le graphe de f admette des asymptotes verticales, il faut que la limite de $f(x)$ en un certain $a \in \mathbb{R}$ soit infinie. Les seuls points en lesquels ceci est possible sont les bornes (finies) du domaine de définition de f. D'après la question 2, le graphe de f admet donc deux asymptotes verticales, d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

9. Pour démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} x + 1 - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Comme la limite de $f(x) - y$ en $+\infty$ est bien nulle, on obtient que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$. En $-\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Comme cette dernière limite est également nulle, on trouve que la droite d'équation $y = x+1$ est également une asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$.

10.

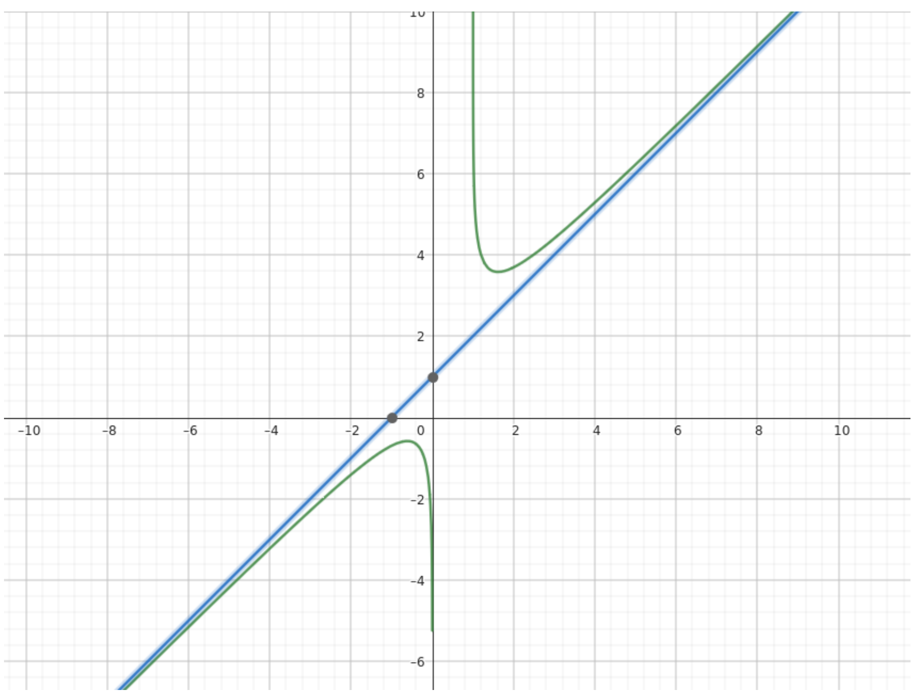

FIGURE 1 – Graphe de f