Correction Examen session 1 2021-2022

Version A

Exercice 1.

a) On note f la fonction considérée, la fonction f est définie par une formule de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = -x^2 - x + 2$. La fonction f est donc définie si et seulement si $u(x)$ est définie et strictement positive. Bien-sûr $u(x)$ est toujours définie (c'est un polynôme), on doit ensuite calculer son signe

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$$

Le signe de $u(x)$ est alors donné par (attention : le coefficient directeur de $u(x)$ est négatif !)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est alors définie sur l'ensemble

$$D_f =]-2, 1[$$

b) On note g la fonction considérée, la fonction g est définie par une formule de la forme $\sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}$, avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x - 1$. La fonction g est donc définie si et seulement si le quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ est défini et positif, on calcule donc son signe d'après les signes de $u(x)$ et $v(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$u(x) = x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$v(x) = x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On en déduit que la fonction g est définie sur l'ensemble

$$D_g =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$$

Exercice 2.

a) Si a et b sont des réels qui conviennent, on a

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} &= \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{ax + a + bx - b}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}\end{aligned}$$

Les nombres a et b satisfont alors le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=4 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

On a donc, pour $x \notin \{\pm 1\}$,

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

b) Comme on se place sur $]-1,1[$, on sait que (x^2-1) est non nul (et même strictement négatif), l'équation (E_1) est donc équivalente à

$$(x^2-1)y' = (3x+1)y \Leftrightarrow y' = \frac{3x+1}{x^2-1}y$$

Les solutions de cette équation sur $]-1,1[$ sont les fonctions de la forme $\lambda e^{F(x)}$ où $F(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{3x+1}{x^2-1}$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
Grâce à la question précédente, on peut calculer facilement une primitive sur $]-1,1[$, on a

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Une primitive de $\frac{1}{x-1}$ est $\ln|x-1| = \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$. Une primitive de $\frac{1}{x+1}$ est $\ln|x+1| = \ln(x+1)$ sur $]-1,1[$. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions

$$y_h = \lambda e^{2\ln(1-x)+\ln(x+1)} = \lambda e^{\ln((1-x)^2)} e^{\ln(x+1)} = \lambda(1-x)^2(x+1)$$

où λ est une constante réelle.

c) On commence par rappeler que la dérivée de $x \mapsto (x+1)(x-1)^2$ est donnée par

$$x \mapsto 1.(x-1)^2 + (x+1)(2(x-1)) = (x-1)((x-1)+2(x+1)) = (x-1)(3x+1)$$

Ensuite, si $y_p(x) = K(x)(x+1)(x-1)^2$, alors

$$y_p'(x) = K'(x)(x+1)(x-1)^2 + K(x)(x-1)(3x+1)$$

Si y_p est une solution de (E_2), on a alors

$$\begin{aligned}(x-1)^3(x+1)^2e^x &= (x^2-1)*(K'(x)(x+1)(x-1)^2 + K(x)(x-1)(3x+1)) - (3x+1)K(x)(x+1)(x-1)^2 \\ &= K'(x)(x-1)^3(x+1)^2\end{aligned}$$

On prend donc $K'(x) = e^x$ et $K(x) = e^x$, on obtient la solution particulière

$$y_p = e^x(x+1)(x-1)^2$$

Les solutions de (E_2) sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p est une solution particulière de (E_2), et où y_h est une solution de l'équation homogène (E_1) associée à (E_2), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = \lambda(1-x)^2(x+1) + e^x(x+1)(x-1)^2 = (\lambda + e^x)(x-1)^2(x+1)$$

où λ est une constante réelle.

Exercice 3.
a) On calcule

$$\Delta = 1+8 = 9, \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Les deux solutions de cette équation sont donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

b) L'équation caractéristique associée à l'équation (E_1) est l'équation du second degré de la question précédente. Compte tenue de ses solutions, les solutions de l'équation (E_1) sont de la forme

$$y_h = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) Considérons une fonction polynômiale de degré 2 $y_p = ax^2 + bx + c$, on a

$$y_p' = 2ax + b \quad \text{et} \quad y_p'' = 2a$$

Si y_p est une solution de l'équation considérée, alors on a

$$x^2 + 1 = y_p'' - y_p' - 2y_p = 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 - 2x(b+a) - 2c - b + 2a$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ b + a = 0 \\ 2a - b - 2c = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = -a = \frac{1}{2} \\ 2c = 2a - b - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

D'où une solution de l'équation :

$$y_p = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 5)$$

d) Les solutions de l'équation considérée sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p en est une solution particulière, et où y_h est une solution de l'équation homogène (E_1), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} + \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 5)$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

Exercice 4.

a) Pour utiliser une intégration par partie, on pose

$$\begin{array}{ll} u'(x) = e^{2x} & u(x) = \frac{1}{2}e^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{2x}dx &= \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \\ &= \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

b) Si $t = \ln(x)$, alors $e^t = x$, en dérivant, on obtient $dt = \frac{1}{x}dx$ et $e^t dt = dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx &= \int_{\ln(1)}^{\ln(e^{\pi/2})} \frac{\cos(t)}{\frac{e^t}{d}t}e^t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt \\ & [\sin t]_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Version B

Exercice 1.
a) On note f la fonction considérée, la fonction f est définie par une formule de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2 - x + 2$. La fonction f est donc définie si et seulement si $u(x)$ est définie et positive (ou nulle). Bien-sûr $u(x)$ est toujours définie (c'est un polynôme), on doit ensuite calculer son signe

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$$

Le signe de $u(x)$ est alors donné par (attention : le coefficient directeur de $u(x)$ est négatif !)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est alors définie sur l'ensemble

$$D_f = [-2, 1]$$

b) On note g la fonction considérée, la fonction g est définie par une formule de la forme $\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$, avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x - 1$. La fonction g est donc définie si et seulement si le quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ est défini et strictement positif, on calcule donc son signe d'après les signes de $u(x)$ et $v(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$u(x) = x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$v(x) = x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On en déduit que la fonction g est définie sur l'ensemble

$$D_g =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Exercice 2.
a) Si a et b sont des réels qui conviennent, on a

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} &= \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{ax + a + bx - b}{(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

Les nombres a et b satisfont alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

On a donc, pour $x \notin \{\pm 1\}$,

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

b) Comme on se place sur $]-1,1[$, on sait que (x^2-1) est non nul (et même strictement négatif), l'équation (E_1) est donc équivalente à

$$(x^2-1)y' = (3x-1)y \Leftrightarrow y' = \frac{3x-1}{x^2-1}y$$

Les solutions de cette équation sur $]-1,1[$ sont les fonctions de la forme $\lambda e^{F(x)}$ où $F(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{3x-1}{x^2-1}$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
Grâce à la question précédente, on peut calculer facilement une primitive sur $]-1,1[$, on a

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

Une primitive de $\frac{1}{x-1}$ est $\ln|x-1| = \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$. Une primitive de $\frac{1}{x+1}$ est $\ln|x+1| = \ln(x+1)$ sur $]-1,1[$. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions

$$y_h = \lambda e^{\ln(1-x)+2\ln(x+1)} = \lambda e^{\ln(1-x)} e^{\ln((x+1)^2)} = \lambda(1-x)(x+1)^2$$

où λ est une constante réelle.

c) On commence par rappeler que la dérivée de $x \mapsto (x+1)^2(x-1)$ est donnée par

$$x \mapsto 2(x+1)(x-1) + (x+1)^2.1 = (x+1)(2(x-1)+x+1) = (x+1)(3x-1)$$

Ensuite, si $y_p(x) = K(x)(x+1)^2(x-1)$, alors

$$y_p'(x) = K'(x)(x+1)^2(x-1) + K(x)(x+1)(3x-1)$$

Si y_p est une solution de (E_2), on a alors

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+1)^3e^x &= (x^2-1)(K'(x)(x+1)^2(x-1) + K(x)(x+1)(3x-1)) - (3x-1)K(x)(x+1)^2(x-1)\\ &= K'(x)(x-1)^2(x+1)^3\end{aligned}$$

On prend donc $K'(x) = e^x$ et $K(x) = e^x$, on obtient la solution particulière

$$y_p = e^x(x+1)^2(x-1)$$

Les solutions de (E_2) sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p est une solution particulière de (E_2), et où y_h est une solution de l'équation homogène (E_1) associée à (E_2), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = \lambda(1-x)(x+1)^2 + e^x(x+1)^2(x-1) = (\lambda - e^x)(1-x)(x+1)^2$$

où λ est une constante réelle.

Exercice 3.
a) On calcule

$$\Delta = 1+8 = 9, \quad x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Les deux solutions de cette équation sont donc $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

b) L'équation caractéristique associée à l'équation (E_1) est l'équation du second degré de la question précédente. Compte tenue de ses solutions, les solutions de l'équation (E_1) sont de la forme

$$y_h = \lambda e^{-2x} + \mu e^x$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) Considérons une fonction polynômiale de degré 2 $y_p = ax^2 + bx + c$, on a

$$y_p' = 2ax + b \quad \text{et} \quad y_p'' = 2a$$

Si y_p est une solution de l'équation considérée, alors on a

$$x^2 + 1 = y_p'' + y_p' - 2y_p = 2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + 2x(a - b) - 2c + b + 2a$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - b = 0 \\ 2a + b - 2c = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = a = -\frac{1}{2} \\ 2c = 2a + b - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \\ c = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

D'où une solution de l'équation :

$$y_p = \frac{1}{4}(-2x^2 - 2x - 5)$$

d) Les solutions de l'équation considérée sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p en est une solution particulière, et où y_h est une solution de l'équation homogène (E_1), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = \lambda e^{-2x} + \mu e^x + \frac{1}{4}(-2x^2 - 2x - 5)$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

Exercice 4.

a) Pour utiliser une intégration par partie, on pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \cos(t) & u(t) = \sin(t) \\ v(t) = t + 1 & v'(t) = 1 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (t+1)\cos(t)dt &= [(t+1)\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t)dt \\ &= 0 - 0 - [-\cos(t)]_0^{2\pi} \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

b) Si $t = \ln(x)$, alors $e^t = x$, en dérivant, on obtient $dt = \frac{1}{x}dx$ et $e^t dt = dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx &= \int_{\ln(1)}^{\ln(e^{\pi/2})} \frac{\sin(t)}{e^t} e^t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\pi/2} \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$