Correction Examen session 2 2021-2022

Exercice 1.
1. L'équation homogène associée à (E) est

$$(EH): \; y'' + y' + y = 3$$

L'équation caractéristique associée à cette équation homogène est

$$(EC): \; r^2 + r + 1 = 0$$

2. On calcule
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

Comme $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes :

$$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

3. Comme les deux solutions de l'équation caractéristique sont complexes, les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont données par
$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

où λ et μ sont deux constantes réelles.

4. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $y_h + y_p$, où y_h est une solution sur $\mathbb{R}$ de (EH), et y_p est une solution particulière de (E). Comme $y_p = 3$ est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont de la forme
$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + 3$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

Exercice 2.
1. Si $u = \sin(x)$, on obtient en dérivant $du = \cos(x)dx$ car la dérivée de sin est cos. On a donc

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))\cos(x)dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} (1 - u^2)du = \int_0^1 (1 - u^2)du$$

2. Une primitive de $1 - u^2$ est donnée par $u - \frac{u^3}{3}$. On a donc

$$I = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{2}{3}$$

Exercice 3.

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1} &= \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{ax+a+bx-b}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{(a+b)x+a-b}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

Si ceci est égal à $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+1+b=0 \\ a=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=-1 \\ a=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=b+1=\frac{1}{2} \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, on a

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x-1}$ (resp. de $\frac{1}{x+1}$) est donnée par $\ln(x-1)$ (resp. par $\ln(x+1)$). Une primitive de f est alors donnée par

$$A(x)=\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)-\ln(x+1)\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

3.a) L'équation homogène associée à l'équation (F) est donnée par

$$(FH):\ (x-1)(x+1)y'-y=0$$

b) L'équation (FH) est équivalente à

$$y'=\frac{y}{(x-1)(x+1)}$$

donc ses solutions sur $]1,+\infty[$ sont données par

$$y_h=\lambda e^{A(X)}=\lambda e^{\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)}=\lambda\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

où λ est une constante réelle.

4.a) On a $G(x)=K(x)u(x)$ avec $u(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. On a

$$u(x)=\sqrt{\frac{u_1(x)}{u_2(x)}}$$

avec $u_1(x)=x-1$, $u_2(x)=x+1$, donc

$$u'(x)=\frac{\left(\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\right)'}{2\sqrt{\frac{u_1(x)}{u_2(x)}}}=\frac{\frac{u_1'(x)u_2(x)-u_1(x)u_2'(x)}{u_2(x)^2}}{2\sqrt{\frac{u_1(x)}{u_2(x)}}}=\frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)^2}$$

On obtient donc

$$G'(x)=K'(x)u(x)+K(x)u'(x)=K'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+K(x)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) On commence par calculer

$$(x-1)(x+1)G'(x) = K'(x)(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)} + K(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

On a donc

$$(x-1)(x+1)G'(x) - G(x) = K'(x)(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)}$$

Si G est solution de (F), alors ceci est égal à $\sqrt{(x-1)(x+1)}$, donc $K'(x) = \frac{1}{x-1}$.

c) Une primitive de $\frac{1}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$ est donnée par $\ln(x-1)$, on prend donc $K(x) = \ln(x-1)$. On obtient alors une solution particulière de (F) :

$$y_p = \ln(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Les solutions de (F) sur $]1,+\infty[$ sont alors données par

$$y = \lambda\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

où λ est une constante réelle.

Exercice 4.

1. On calcule

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 3 = 16-12 = 4, \quad x_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$$

2. La fonction f est de la forme $f(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = x^2-4x+3$. La fonction f est alors définie si et seulement si $u(x) > 0$. On calcule donc le signe de $u(x)$ grâce à la question précédente :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est alors définie sur l'intervalle $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.

3.a) La dérivée d'une fonction de la forme $\ln(u(x))$ est donnée par la formule $\frac{u'(x)}{u(x)}$. On a ici

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$$

b) Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée $f'(x)$. Comme, sur le domaine de définition de f, la fonction x^2-4x+3 est positive, le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $2x-4$, qui est négatif puis positif (le changement se faisant en $x=2$). On obtient le tableau de signe/variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$					s	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$				$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites sont calculées par

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty, \lim_{x \to 1^-, 3^+} x^2 - 4x + 3 = 0^+$$

et $\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$, $\lim_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$.

4.a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} u(4-x) &= (4-x)^2 - 4(4-x) + 3 \\ &= 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 3 \\ &= x^2 - 4x + 3 = u(x) \end{aligned}$$

En particulier, x se trouve dans le domaine de f si et seulement si c'est le cas de $4 - x$. Et on a

$$f(4-x) = \ln(u(4-x)) = \ln(u(x)) = f(x)$$

b) Pour un réel x donné, le milieu entre x et $4 - x$ est 2. Le graphe de f admet donc une symétrie axiale d'axe vertical ayant pour équation $x = 2$.

5. Pour x assez grand, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = 0$$

Enfin, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = 0 \times 1 = 0$$

6.

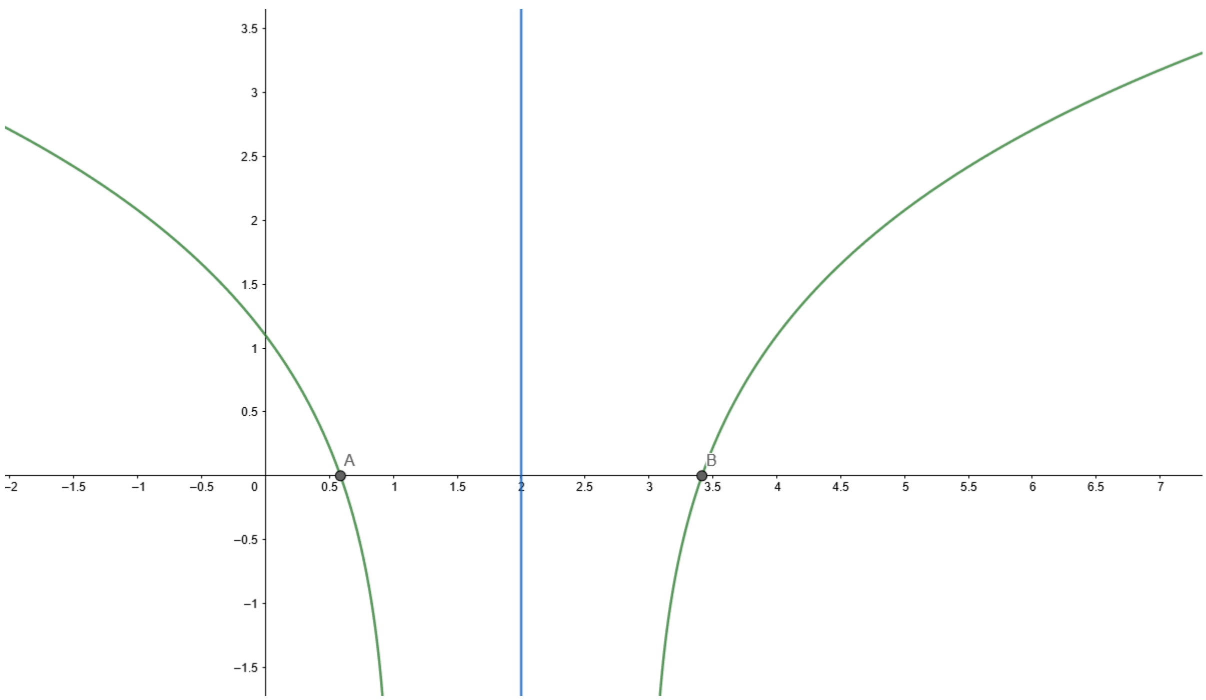

FIGURE 1 – Allure du graphe de f