Correction Examen session 1 2018-2019

Exercice 1. La fonction considérée est définie comme un quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ et $v(x) = x-4$, elle est donc définie si et seulement si $u(x)$ est définie et $v(x)$ est définie non nulle. Comme $u(x)$ est définie par une racine, elle est définie si et seulement si $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, on calcule

$$\Delta = 25 - 24 = 1, \quad x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

On a alors $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$.
Ensuite, comme $v(x)$ est un polynôme (de degré 1), elle est toujours définie, et on a $v(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.
Au final, on trouve que l'ensemble de définition de f est

$$(]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[) \cap (\mathbb{R} \setminus \{4\}) =]-\infty, 2] \cup [3, 4[\cup]4, +\infty[$$

Exercice 2. On utilise la quantité conjuguée : pour $x > -4$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} - \sqrt{x+5} &= \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+5})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} \\
&= \frac{\sqrt{x+4}^2 - \sqrt{x+5}^2}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} \\
&= \frac{x+4-(x+5)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}}
\end{aligned}$$

Comme on a $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+4} + \sqrt{x+5} = +\infty$, on conclut que

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} = 0$$

Exercice 3. Effectuons le changement de variable $u = 1 + e^t$ (on a donc $u - 1 = e^t$ et $t = \ln(u-1)$). En dérivant on obtient $du = e^t dt$ et donc $du = (u-1)dt$ et $dt = \frac{du}{u-1}$.
Ensuite pour les bornes, si $t = 0$, alors $u = 1 + e^0 = 2$, et si $t = \ln(2)$, alors $u = 1 + e^{\ln(2)} = 1 + 2 = 3$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t dt}{1+e^t} &= \int_2^3 \frac{(u-1)\frac{du}{u-1}}{u} \\
&= \int_2^3 \frac{du}{u} \\
&= [\ln|u|]_2^3 \\
&= \ln 3 - \ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 4.

a). L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$(EH) \ : \ y'' - 4y' + 4y = 0$$

b). L'équation caractéristique associée à l'équation homogène (EH) est donnée par

$$(EC) \ : \ X^2 - 4X + 4 = 0$$

c). Pour résoudre l'équation homogène, on commence par donner les solutions de l'équation caractéristique, on a

$$\Delta = 16 - 16 = 0, \quad x_0 = \frac{4}{2} = 2$$

Comme l'équation caractéristique (EC) admet une unique solution $x_0 = 2$ les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont données par

$$y_h = \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x}$$

où λ, μ sont des constantes réelles.

d). Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = ax^2e^{2x}$, on a

$$y_p' = a(2x^2 + 2x)e^{2x} \quad \text{et} \quad y_p'' = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^{2x} = y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= a(4x^2 + 8x + 2 - 4(2x^2 + 2x) + 4x^2)e^{2x} \\ &= a(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2)e^{2x} \\ &= 2ae^{2x} \end{aligned}$$

Pour que ceci soit égal à e^{2x}, on peut prendre $a = \frac{1}{2}$, on obtient donc que la fonction $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ est une solution particulière de (E).

e). Les solutions de (E) sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p est une solution particulière de (E), et où y_h est une solution de l'équation homogène associée à (E), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

Exercice 5.

a). Les primitives de la fonction $f : t \mapsto te^t$ sont de la forme $F(t) + C$ où F est une primitive particulière, et C est une constance réelle. On calcule une primitive de f par

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x te^t dt$$

Pour déterminer la valeur de cette intégrale, on utilise une intégration par partie, en posant

$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}$$

on obtient

$$\int_1^x te^t dt = \left[te^t\right]_1^x - \int_1^x e^t dt = \left[te^t\right]_1^x - \left[e^t\right]_1^x = xe^x - e^1 - e^x + e^1 = xe^x - e^x$$

(on peut vérifier par le calcul que c'est bien une primitive de f : en dérivant, on obtient $xe^x + e^x - e^x = xe^x = f(x)$). Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $xe^x - e^x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

b). Commençons par noter que l'équation homogène associée à (E) est

$$(EH)\ :\ y' - te^t y = 0 \Leftrightarrow y' = te^t y$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $\lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de $f(t) = te^t$, on a calculé une telle primitive à la question précédente : les solutions de l'équation homogène sont alors données par

$$y_h = \lambda e^{te^t - e^t} = \lambda e^{(t-1)e^t} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

c). Faisons une variation de la constante : cherchons une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p = \lambda(t)e^{(t-1)e^t}$, on a

$$y_p' = (\lambda'(t) + te^t\lambda(t))e^{(t-1)e^t}$$

de sorte que $y_p' - te^t y_p = \lambda'(t)e^{(t-1)e^t}$, qui est égal à $e^{(t-1)e^t}$ si $\lambda'(t) = 1$, on prend donc $\lambda(t) = t$ (une primitive de 1), et on conclut que $y_p = te^{(t-1)e^t}$ est une solution particulière de (E).

d). Les solutions de (E) sont de la forme $y_h + y_p$, où y_p est une solution particulière de (E), et où y_h est une solution de l'équation homogène associée à (E), ici on obtient donc que les solutions sont de la forme

$$y = (\lambda + t)e^{(t-1)e^t} \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Exercice 6.

a). La fonction f est définie par une formule de la forme $\ln(u(x))$, avec $u(x) = x^2 - 5x + 6$, donc f est définie si et seulement si u est définie et $u(x) > 0$. On sait que u est toujours définie car c'est un polynôme, ensuite, on a déjà calculé son signe au début de l'exercice 1 : $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$, ce dernier ensemble est donc le domaine de définition de f.

b). Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $5/2 - h \in D_f$ le domaine de définition de f, on distingue deux cas :

- Si $5/2 - h < 2$, alors $-h < 2 - 5/2 = -1/2$ et $h > 1/2$, on a alors $h + 5/2 > 6/2 = 3$ et $h + 5/2 \in D_f$.
- Si $5/2 - h > 3$ alors $-h > 3 - 5/2 = 1/2$ et $h < -1/2$, on a alors $h + 5/2 < 4/2 = 2$ et $h + 5/2 \in D_f$.

Ensuite, si $5/2 - h$ est dans le domaine de f, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2} - h\right) &= \ln\left(\left(\frac{5}{2} - h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2} - h\right) + 6\right) \\ &= \ln\left(\frac{25}{4} - 5h + h^2 - \frac{25}{2} + 5h + 6\right) \\ &= \ln\left(\frac{25}{4} + h^2 - \frac{25}{2} + 6\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{5}{2} + h\right)6\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2} + h\right) &= \ln\left(\left(\frac{5}{2} + h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2} + h\right) + 6\right) \\ &= \ln\left(\frac{25}{4} + 5h + h^2 - \frac{25}{2} - 5h + 6\right) \\ &= \ln\left(\frac{25}{4} + h^2 - \frac{25}{2} + 6\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{5}{2} + h\right)6\right) \end{aligned}$$

On en déduit que le graphe de f admet une symétrie axiale par rapport à l'axe vertical d'équation $x = \frac{5}{2}$.

c). La fonction f est de la forme $\ln(u(x))$, sa dérivée est donc de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, on a donc

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

d). Les bornes du domaine de définition de f sont $-\infty, 2, 3, +\infty$, on calcule donc

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-5x+6) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-5x+6) = +\infty$$

car $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 5x + 5 = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$. Ensuite, on a

$$\lim_{x\to2^-} \ln(x^2-5x+6) = \lim_{y\to0+} \ln(y) = -\infty = \lim_{x\to3^+} \ln(x^2-5x+6)$$

car $x^2 - 5x + 6$ s'annule en 2 et en 3.

e). On sait déjà que f admet deux asymptotes verticales en $x = 2$ et $x = 3$ (car les limites de f en ces points sont infinies). Ensuite, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-5x+6)}{x} = 0$$

Par croissance comparée, de même $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc f admet des branches paraboliques en $\pm\infty$ toutes deux de directions O_x l'axe des abscisses.

f). Pour déterminer les variations de f, on détermine le signe de la fonction dérivée f'. Par symétrie du graphe de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $[5/2, +\infty[\cap D_f =]3, +\infty[$. Sur cet intervalle, on a $x^2 - 5x + 6 > 0$ et $2x - 5 > 0$, donc $f' > 0$ et f est croissante. Par symétrie, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2	$5/2$	3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

g).

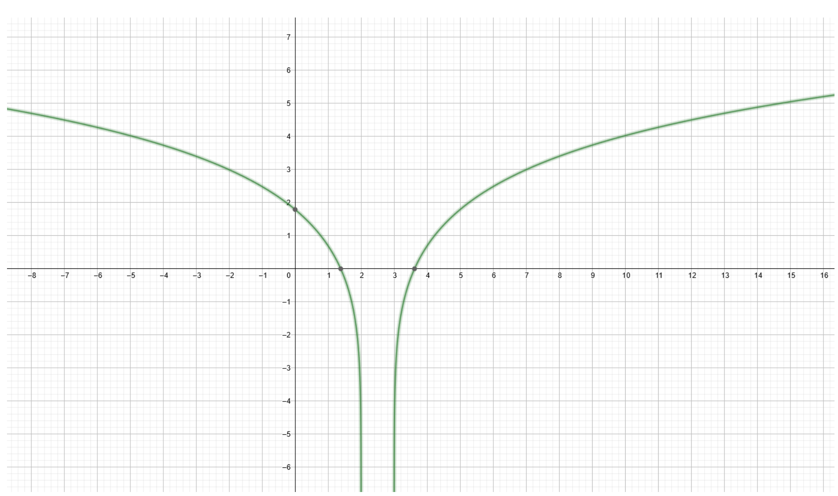

FIGURE 1 – Allure du graphe de f