Correction Examen session 1 2017-2018

Exercice 1.

1. Pour déterminer si le trinôme $x^2 + 2x + 2$ admet des racines réelles, on calcule

$$\Delta = 2^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4$$

Comme $\Delta < 0$, le trinôme considéré n'admet aucune racine réelle. Comme le coefficient directeur du trinôme est $1 > 0$, on conclut que le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (comme logarithme d'une quantité strictement positive).

2. Comme la fonction f est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$, elle est dérivable partout où elle est définie (en l'occurrence sur $\mathbb{R}$), avec

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

3. Comme $u(x) = x^2 + 2x + 2$ est un trinôme de coefficient directeur positif, on a

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$$

Et comme $\lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$, on conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

4. Les variations de f sont déterminées par le signe de la fonction f', celle-ci est définie par un quotient, dont le dénominateur est strictement positif (c'est le trinôme de la première question), le signe de f' est donc donné par le signe de la fonction $x \mapsto 2x + 2$. On a

$$2x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$$

On en déduit le tableau de signe/variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

(le minimum de f est atteint en $x = -1$, avec $f(-1) = \ln(1) = 0$).

5. Soit x un réel quelconque, on a

$$\begin{aligned} f(-2-x) &= \ln((-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2) \\ &= \ln(4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2) \\ &= \ln(x^2 + 2x + 2) = f(x) \end{aligned}$$

Le milieu de -2 et de 0 étant -1, on en déduit que le graphe de f admet une symétrie axiale d'axe vertical $x = -1$ (ce qui est cohérent avec notre tableau de variations !)

6. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2+2x+2)}{x} &= \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}\\ &= \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}\\ &= \frac{2\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, ensuite, $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2} = 1$ donc la deuxième fraction admet 0 pour limite (moralement, $\frac{\ln(1)}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$). Par symétrie, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ également, la fonction f admet donc des branches paraboliques de direction O_x (l'axe des abscisses) en $+\infty$ et $-\infty$.

7. La fonction $f'(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x+2$ et $v(x) = x^2+2x+2$, la fonction dérivée de f' (donc la dérivée seconde de f) est alors donnée par

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\ &= \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\end{aligned}$$

8. La concavité/convexité de f est donnée par le signe de f'', cette fonction étant définie par un quotient de deux fonctions, dont le dénominateur est positif (strictement), le signe de f'' est donné par le signe de $-2x(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur $[-2, 0]$, et concave sur $]-infty, -2]$, $[0, +\infty[$. Il y a donc deux points d'inflexion, en $x = -2$ et en $x = 0$, l'équation des tangentes en ces deux points sont données par

$$T_{-2}f : y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = -(x+2) + \ln(2)$$

$$T_0 f : y = f'(0)x + f(0) = x + \ln(2)$$

9. D'après le tableau de variations de f, le seul extremum local se trouve en $x = -1$, la tangente en ce point est horizontal (c'est le principe d'un extremum local : on a en particulier $f'(x) = 0$ donc une tangente horizontale), d'où le graphe suivant :

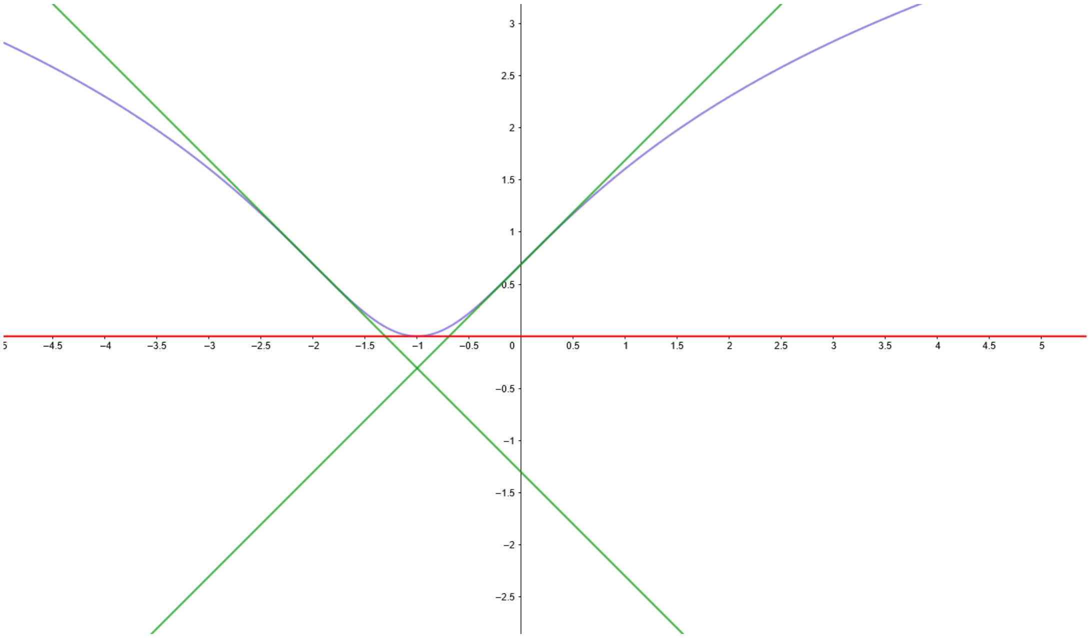

FIGURE 1 – Allure du graphe de f avec tangentes aux extrema et points d'inflexion

Exercice 2.

1. L'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$(EH) : y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est donnée par

$$(EC) : X^2 - 3X + 2 = 0$$

3. Pour résoudre (EH), on commence par calculer les racines de l'équation caractéristique : on calcule

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On a deux racines réelles distinctes, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_h = \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

avec λ, μ des constantes réelles.

4. Soit une fonction $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, on a

$$f'(x) = a\cos(x) - b\sin(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = -a\sin(x) - b\cos(x)$$

Si f est une solution de (E), on a

$$\begin{aligned} \sin(x) &= f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) \\ &= (-a + 3b + 2a)\sin(x) + (-b - 3a + 2b)\cos(x) \\ &= (3b + a)\sin(x) + (-3a + b)\cos(x) \end{aligned}$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} 3b + a = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 1 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{10}(\sin(x) + 3\cos(x))$.

5. Les solutions de (E) sont toutes de la forme $y_p + y_h$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH), les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{1}{10}(\sin(x) + 3\cos(x))$$

où λ, μ sont des constantes réelles.

6. Soit y une solution de (E), de la forme donnée dans la question précédente, on a alors

$$y' = \lambda e^x + 2\mu e^{2x} + \frac{1}{10}(-3\sin(x) + \cos(x))$$

En particulier, $y(0) = \lambda + \mu + \frac{3}{10}$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu + \frac{1}{10}$. Pour avoir $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, il faut et il suffit que λ, μ satisfassent le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{3}{10} = 1 \\ \lambda + 2\mu + \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{7}{10} \\ \lambda + 2\mu = \frac{-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{7}{10} - \mu = \frac{15}{10} \\ \mu = \frac{-8}{10} \end{cases}$$

On obtient donc une unique solution au problème, donnée par

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(15e^x - 8e^{2x} + \sin(x) + 3\cos(x)\right)$$

Exercice 3.

1. On sait que la fonction $F(t) = \int_1^t xe^x dx$ est une primitive de $x \mapsto xe^x$ (nulle en $t = 1$), on calcule

$$F(t) = \int_1^t xe^x dx$$

On utilise une intégration par partie en posant

$$\begin{array}{ll} u'(x) = e^x & u(x) = e^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array}$$

On obtient

$$F(t) = [xe^x]_1^t - \int_1^t e^x dx = te^t - 1 - [e^x]_1^t = te^t - 1 - e^t + 1 = te^t - e^t$$

Une primitive de $x \mapsto xe^x$ est donc donnée par $F(t) = te^t - t$.

2. L'équation considérée est équivalente à $y' = xe^x y$, les solutions sont toutes de la forme $\lambda e^{F(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F(x)$ est une primitive de $x \mapsto xe^x$. Comme on a calculé une telle primitive à la question précédente, on obtient que les solutions de (EH) sont

$$y_h = \lambda e^{xe^x - x} \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

3. On peut utiliser une variation de la constante (c'est ce qui est fait dans le corrigé de l'examen 2018-2019 par exemple), mais on peut aussi noter que $y_p = -1$ est une solution évidente, en effet comme $y_p' = 0$, on a $y_p' - xe^x y_p = 0 + xe^x = xe^x$.

4. Les solutions de (E) sont toutes de la forme $y_p + y_h$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH), les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^{xe^x - x} - 1 \ (\lambda \in \mathbb{R})$$