# Correction Examen session 2 2016-2017

**Exercice 1.**

1. La formule définissant la fonction $f$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + x - 2$. La fonction $f$ est donc définie si et seulement si $u(x)$ est défini et $\geqslant 0$. On détermine donc le signe de $u(x)$, comme c'est un polynôme de degré 2 (dont le coefficient dominant est positif) il suffit de déterminer les racines de $u(x)$. On calcule

$$\Delta = 1 - 4.1.(-2) = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$$

D'où le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Qui nous indique que $f$ est définie sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

2. Une fonction de la forme $\sqrt{u(x)}$ est dérivable en $x$ si et seulement si $u(x) > 0$, donc ici $f$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ (il faut enlever les endroits où la racine vaut 0). La dérivée de $\sqrt{u(x)}$ est $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Ici, on a $u(x) = x^2 + x - 2$ et $u'(x) = 2x + 1$, d'où

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

3. On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + x - 2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 + x - 2 = +\infty$$

on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{u(x)} = +\infty$$

Ensuite, on a

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^2 + (-2) - 2} = \sqrt{4-2-2} = 0, \quad f(1) = \sqrt{1^2 + 1 - 2} = 0$$

(on aurai aussi pu voir les valeurs de $f(-2)$ et $f(1)$ grâce au tableau de signe de la question 1).

4. Soit $x$ dans le domaine de définition de $f$, on distingue deux cas :

- Si $x \leqslant -2$, alors $-x \geqslant 2$ et $-1-x \geqslant 1$, donc $-1-x$ est également dans le domaine de définiton de $f$.
- Si $x \geqslant 1$, alors $-x \leqslant -1$ et $-1-x \leqslant -2$, donc $-1-x$ est également dans le domaine de définiton de $f$.

L'équation $f(-1-x) = f(x)$ a donc un sens (même si on n'a pas encore montré qu'elle est vraie). On a ensuite

$$\begin{aligned}
f(-1-x) &= \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x) - 2} \\
&= \sqrt{(1+x)^2 - 1 - x - 2} \\
&= \sqrt{1 + 2x + x^2 - x - 3} \\
&= \sqrt{x^2 + x - 2} = f(x)
\end{aligned}$$

pour $x$ dans le domaine de définition de $f$. C'est le résultat souhaité. Comme le milieu de $x$ et de $-1-x$ est $\frac{-1}{2}$, on en déduit que le graphe de $f$ admet une symétrie axiale d'axe vertical donné par l'équation $x = \frac{-1}{2}$.

5. Le tableau de variations de $f$ est donné par le tableau de signe de $f'$. On calcule donc le signe de

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

On sait que $f'$ est un quotient, dont le dénominateur est toujours positif (une racine carrée est toujours positive, quand elle est définie), donc le signe de $f'$ est le même que celui de $2x+1$ là où $f'$ est définie. On a donc le tableau de signe/variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | $-\frac{1}{2}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | | | | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. En utilisant la quantité conjuguée, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x-2} - \left(x+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x-2} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x-2} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+x-2}^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{x^2+x-2-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{-9}{4}}{\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Quand $x$ tends vers $+\infty$, on sait que $\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)$ tends vers $+\infty$. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-2} - \left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-9}{4}}{\sqrt{x^2+x-2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)} = 0$$

On en déduit que $f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $x+\frac{1}{2}$, et le fait que $\sqrt{x^2+x-2} - \left(x+\frac{1}{2}\right)$ soit négatif nous apprends en plus que $f$ s'approche de son asymptote par en dessous.

6. On a

$$\lim_{x\to1^+} 2x+1 = 2+1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1^+} 2\sqrt{x^2+x-2} = 0^+$$

d'où

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} = +\infty$$

7.

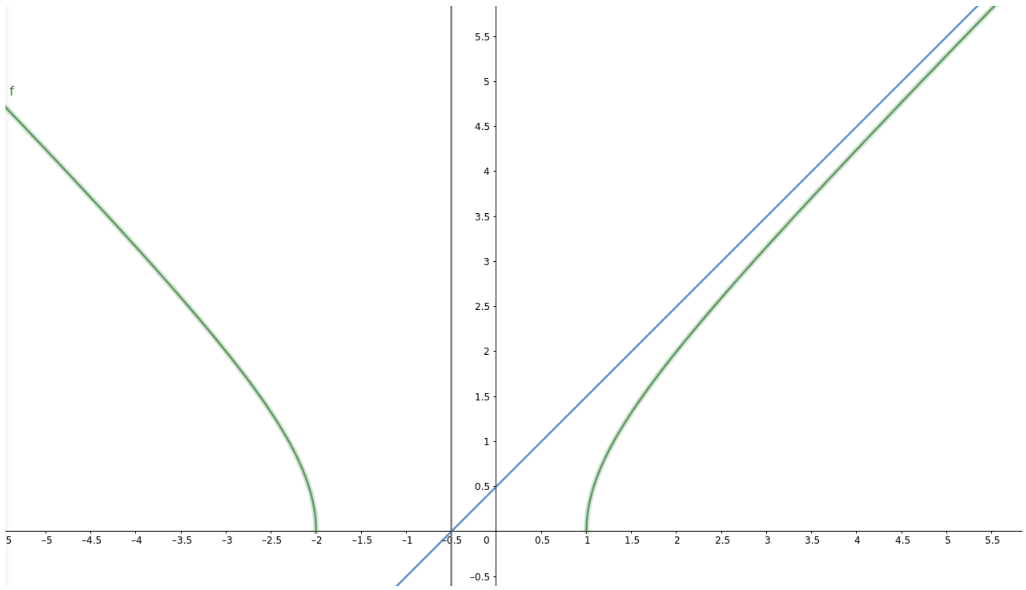

Figure 1 – Allure du graphe de $f$ avec asymptote et axe de symétrie

**Exercice 2.**
1. L'équation homogène $(EH)$ associée à $(E)$ est donnée par

$$(EH)\ :\ y'' - 5y' + 6y = 0$$

2. L'équation caractéristique $(EC)$ associée à $(EH)$ est donnée par

$$(EC)\ :\ X^2 - 5X + 6 = 0$$

3. On calcule

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1, \quad x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

Il y a donc deux solutions réelles distinctes de $(EC)$, respectivement 2 et 3. 4. Soit $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, on a

$$f'(x) = a\cos(x) - b\sin(x) \ \text{ et } \ f''(x) = -a\sin(x) - b\cos(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) &= (-a + 5b + 6a)\sin(x) + (-b - 5a + 6b)\cos(x) \\ &= (5b + 5a)\sin(x) + (5b - 5a)\cos(x) \end{aligned}$$

Si $f$ est solution de $(E)$, alors

$$(5b + 5a)\sin(x) + (5b - 5a)\cos(x) = \sin(x) = 1.\sin(x) + 0.\cos(x)$$

On résout donc le système linéaire

$$\begin{cases} 5b + 5a = 1 \\ 5b - 5a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + 5a = 1 \\ b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 1 \\ b = a \end{cases}$$

On prend donc $a = b = \frac{1}{10}$ et on obtient que $f(x) = \frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x))$ est une solution particulière de $(E)$.
5. Les solutions de $(E)$ sont de la forme

$$y = y_h + y_p$$

où $y_h$ est une solution quelconque de $(EH)$ et $y_p$ est une solution particulière de $(E)$. Comme on a déjà calculé une solution particulière de $(E)$ à la question précédente, il reste à calculer les solutions de $(EH)$. Comme il y a deux solutions distinctes (2 et 3) de l'équation caractéristique $(EC)$, on en déduit que les solutions de $(EH)$ sont de la forme

$$y_h = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux constantes réelles. On a alors que les solutions de $(E)$ sont données par

$$y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + \frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x))$$

**Exercice 3.**

1. La fonction $A$ est définie (et dérivable) si et seulement si $\ln(x)$ est défini (et dérivable), donc $A$ est définie (et dérivable) sur $]0, +\infty[$. Pour calculer la dérivée de $A$, on commence par calculer la dérivée de $x\ln(x)$ avec la formule des produits :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$(uv)' = u'v + uv' = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

on a donc

$$A'(x) = (x\ln(x))' - x' = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

2. Les solutions de $y' - \ln(x)y = 0$ sont de la forme $\lambda e^{F(x)}$ où $F(x)$ est une primitive de $\ln(x)$, et $\lambda$ est une constante réelle. D'après la question précédente, $A(x)$ est une primitive de $\ln(x)$, les solutions de $(EH)$ sont alors données par

$$y_h = \lambda e^{x\ln(x)-x}$$

où $\lambda$ est une constante réelle.

3. Soit $f(x) = K(x)e^{x\ln(x)-x}$, la dérivée de $f$ est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= K'(x)e^{x\ln(x)-x} + K(x)(e^{x\ln(x)-x})' \\ &= K'(x)e^{x\ln(x)-x} + K(x)\left((x\ln(x) - x)'e^{x\ln(x)-x}\right) \\ &= K'(x)e^{x\ln(x)-x} + K(x)\left(\ln(x)e^{x\ln(x)-x}\right) \\ &= K'(x)e^{x\ln(x)-x} + \ln(x)f(x) \end{aligned}$$

Si $f$ est solution de $(E)$, on a alors

$$f'(x) - \ln(x)f(x) = K'e^{x\ln(x)-x} = xe^{x\ln(x)-x}$$

On peut donc prendre $K(x) = x$, qui donne une solution particulière de $(E)$ :

$$y_p = xe^{x\ln(x)-x}$$

4. Les solutions de $(E)$ sont données par $y = y_h + y_p$ où $y_h$ est une solution de l'équation homogène $(EH)$, et $y_p$ est une solution particulière de $(E)$. D'après les questions précédentes, les solutions de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ sont données par

$$y = \lambda e^{x\ln(x)-x} + xe^{x\ln(x)-x}$$

où $\lambda$ est une constante réelle.