(25) (tt) (85)

UPJV – UFR des Sciences 2024/2025
LICENCE 1 – MÉTHODES ET TECHNIQUES DE CALCUL R. ABDELLATIF

Examen de Session 1 – Mardi 17 Décembre 2024

Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

A INDIQUER SUR LA COPIE : SUJET A

Les calculatrices sont interdites. Aucun document n'est autorisé.

Ce sujet est constitué de 2 pages et de 4 exercices indépendants les uns des autres.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie : en particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié ultérieurement.

Exercice 1. — Questions de cours (6 points) —

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ existe et vaut 0.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.
3. Démontrer qu'il existe un réel $c \in [0; 2]$ vérifiant l'égalité suivante :
$$c^4 - 2c^2 - 1 = c\ .$$

Exercice 2. — (3 points) —

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^3$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
2. Résoudre l'équation $-7e^x < 1$.
3. Résoudre l'équation $2\ln(x) + 5 = -1$.

Exercice 3. — (6 points) —
Etant donnés des réels a, b, c, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} .$$

1. Pourquoi f est-elle effectivement bien définie sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs des réels a, b, c la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

T.S.V.P.

UPJV – UFR des Sciences 2024/2025

LICENCE 1 – MÉTHODES ET TECHNIQUES DE CALCUL R. ABDELLATIF

Examen de Session 1 – Mardi 17 Décembre 2024

Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

A INDIQUER SUR LA COPIE : SUJET A

Exercice 4. — **(15 points)** —
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Indication : Attention au signe que peut prendre x...
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
4. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, puis calculer sa fonction dérivée f' sur chacun de ces intervalles.
5. Vérifier que, pour tout réel x, on a l'égalité suivante :
$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = x^2 - x - 1$$
6. Etablir le tableau de variations de f.
   Tous les calculs menant à la construction de ce tableau devront être explicitement indiqués sur la copie, sous peine de pénalités.
7. Le graphe de la fonction f admet-il des asymptotes horizontales ?
8. Le graphe de la fonction f admet-il des asymptotes verticales ?
9. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
10. Tracer l'allure du graphe de la fonction f, en indiquant clairement :
    — les unités du repère utilisé pour le tracé ;
    — les éventuelles asymptotes déterminées dans les questions précédentes ;
    — les éventuels points remarquables utilisées pour le tracé.
    Indication : On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,62 \ ; \ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62 \ ; \ f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -0,58 \ ; \ f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 3,58 .$$