Examen session 2 2021-2022

Exercice 1. 1. Quelle est l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(E)\ :\ y'' + y' + y = 3$$

2. Résoudre l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0$$

3. Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E) ?
4. Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) ?

Exercice 2. 1. Effectuer le changement de variable $u = \sin(x)$ dans l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx$$

2. Calculer I.

Exercice 3. 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tout réels x différents de -1 et de 1 on a

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2. Calculer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
3. a) Quelle est l'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$(F)\ :\ (x-1)(x+1)y' - y = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

   b) Quelles sont les fonctions solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation homogène associée à (F).
4. a) Soit $K(x)$ une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$, exprimer à l'aide de $K(x)$ et $K'(x)$ une expression de la fonction dérivée de $G(x) = K(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
   b) Si on suppose que G est une solution de (F) sur $]1, +\infty[$ quelle est l'expression de $K'(x)$?
   c) Quelles sont les solutions sur $]1, +\infty[$ de (F) ?

Exercice 4. 1. Résoudre l'équation

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

2. Quel est le domaine de définition de la fonction définie par la formule

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$$

3. a) Calculer l'expression de la fonction dérivée de f.
   b) Donner le tableau des variations de f en précisant les limites de f aux bornes de son domaine.
4. a) Montrer que pour tous les réels qui sont dans le domaine de f on a

$$f(4 - x) = f(x)$$

   b) Expliquer pourquoi cela montre que le graphe de f est symétrique par rapport à une droite que l'on précisera.
5. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-4x+3)}{\sqrt{x^2-4x+3}}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. (*Indication : On rappelle que* $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = 0$).
6. Donner l'allure du graphe de f. On fera apparaitre CLAIREMENT une éventuelle symétrie de ce graphe et les points où f s'annule.