

Outils Mathématiques

Session II 2016-2017

Février 2016

Les calculatrices, téléphones portables et ordinateurs sont interdits durant l'épreuve

Exercice 1

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

- 1) Quel est le domaine de définition de la fonction f (1 pt)
- 2) Donner une expression de la fonction dérivée de f et le domaine de dérivabilité (1,5 pt)
- 3) Que valent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $f(-2)$, $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$? (0,25 pt par réponse)
- 4) Montrer que pour tout réel x dans le domaine de définition de f on a $f(-1-x) = f(x)$. quelle symétrie du graphe de f peut-on en déduire? (on pourra remarquer que le milieu de x et de $-1-x$ est $-\frac{1}{2}$) (1 pt + 1 pt)
- 5) Donner le tableau des variations de f (1 pt)
- 5) En utilisant la quantité conjuguée calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x - 2} - (x + \frac{1}{2})]$. Que peut-on en déduire? (1,5 pt + 1 pt)
- 6) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$ (0,5 pt)
- 7) Donner un tracé du graphe de f (2 pt)

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(x)$$

- 1) Quelle est l'équation homogène (EH) associée à (E)? (1 pt)
- 2) Quelle est l'équation caractéristique (EC) associée à (EH)? (1 pt)
- 3) Résoudre (EC) (1 pt)
- 4) Chercher parmi les fonctions de la forme $f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$ avec a et b des réels une solution de (E). (1,5 pt)
- 5) Quelles sont les solutions de (E)? (1 pt)

Exercice 3

- 1) Domaine de définition et fonction dérivée de la fonction $A(x) = x \ln(x) - x$. (1 pt)
- 2) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation linéaire du premier ordre

$$(EH) : y' - \ln(x) \cdot y = 0$$

(1,5 pt)

- 3) Chercher une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : y' - \ln(x) \cdot y = x e^{x \ln(x) - x}$$

parmi les fonctions de la forme $K(x) e^{x \ln(x) - x}$ avec K une fonction dérivable. (1,5 pt)

- 4) Quelles sont les solutions sur $]0, +\infty[$ de (E)? (1 pt)