Feuille 4 – Mise en oeuvre d'une étude complète de fonction

I) Etude de fonctions : procédure guidée pas à pas

Exercice 1. —
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $-3 \leq f(x) \leq 3$.
2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction f.
3. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Etablir le tableau de variations de f.
5. La fonction f admet-elle des asymptotes horizontales ? Verticales ? Obliques ?
6. La fonction f admet-elle une tangente en $x = 1$? En $x = \pi$?
   En cas d'existence, en donner l'équation correspondante.
7. Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (ainsi que les éventuelles asymptotes et tangentes déterminées dans les deux questions précédentes).

Exercice 2. —
On considère la fonction g définie par $g(x) = x\ln(x)$.

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g.
2. Etudier la parité et la périodicité éventuelles de la fonction g.
3. Calculer la fonction dérivée de g et en déduire la monotonie de g.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Déterminer les éventuelles asymptotes (verticales, horizontales, obliques) de g.
6. Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction g sur son domaine de définition (en choisissant une échelle adaptée et en traçant les éventuelles asymptotes déterminées dans la question précédente).

Exercice 3. —
On considère la fonction h définie par

$$h(x) = x - \sqrt{|x-1|} \ .$$

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de h.
2. Etudier la parité de la fonction h.
3. Calculer la fonction dérivée de h là où elle existe.
4. Dresser le tableau de variations de h.
5. Déterminer les éventuelles asymptotes (verticales, horizontales, obliques) de h.
6. Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction h sur son domaine de définition (en choisissant une échelle adaptée et en traçant les éventuelles asymptotes déterminées dans la question précédente).

Feuille 4 – Mise en oeuvre d'une étude complète de fonction

Exercice 4. —
On considère la fonction ℓ définie par

$$\ell(x) = \begin{cases} x(x-3) & \text{si } x < -1 \\ 3x+7 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{20\sin(2\pi x)}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de ℓ.
2. Etudier la parité et la périodicité éventuelle de ℓ.
3. Là où elle existe, calculer la fonction dérivée ℓ' et étudier la monotonie de ℓ.
4. Dresser le tableau de variations de ℓ.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction ℓ sur l'intervalle $]-2;2[$.

II) Etude de fonctions : passage à l'étude en autonomie

Exercice 5. —
En suivant les modèles présentés en cours et/ou en s'appuyant sur les exemples d'études proposées dans la partie ci-avant, réaliser l'étude complète de la fonction f définie par

$$f(x) := (x^2 - 2x + 3)e^{-x^2} .$$

Exercice 6. —
En suivant les modèles présentés en cours et/ou en s'appuyant sur les exemples d'études proposées dans la partie ci-avant, réaliser l'étude complète de la fonction g définie par

$$g(u) := 12e^{u+3} - \frac{\cos(2u) - 1}{u} .$$

Exercice 7. —
En suivant les modèles présentés en cours et/ou en s'appuyant sur les exemples d'études proposées dans la partie ci-avant, réaliser l'étude complète de la fonction h définie par

$$h(t) := \frac{-e^{t^2} - 5t}{3t^2 - 12} .$$

Exercice 8. —
En suivant les modèles présentés en cours et/ou en s'appuyant sur les exemples d'études proposées dans la partie ci-avant, réaliser l'étude complète de la fonction ℓ définie par

$$\ell(z) := \frac{z^5 + 3z^3 + 2z}{5\ln(z)} .$$