UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025
LICENCE 1 – MÉTHODES ET TECHNIQUES DE CALCUL R. ABDELLATIF

Feuille 2 – Existence et calculs de limites

I) Quelques compléments sur les limites

Exercice 1. —
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$;
(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

Exercice 2. —
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$;
(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui converge vers a (i.e. telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$), il existe un entier $N \geq 0$ tel que la suite $(f(u_n))_{n\geq N}$ soit bien définie, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercice 3. —
Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq g(x)\ .$$

1. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

II) Développer des automatismes 1 : fonctions polynomiales, fonctions rationnelles et racines carrées

Exercice 4. —
Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^3 - 2\ ;\ \lim_{x\to+\infty} -2x^4 + 5x^3 - 2\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{3x^2-2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^3-1}}\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} 5x^3 - 2\ ;\ \lim_{x\to-\infty} -2x^4 + 5x^3 - 2\ ;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{3x^2-2}\ ;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1-x^3}}\ ;$$

$$\lim_{x\to2} 3x^2 - 5\ ;\ \lim_{x\to0^+} \sqrt{2x+5}\ ;\ \lim_{x\to0} \frac{2x-5}{3x+2}\ ;\ \lim_{x\to3} \frac{5x}{x^2-9}\ ;\ \lim_{x\to5^-} \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}}\ .$$

Exercice 5. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1 - \dfrac{3x}{x^2-4}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

Feuille 2 – Existence et calculs de limites

Exercice 6. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $[x \mapsto 4x^4 + 2x^2]$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 7. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{3x+5}{4x-8}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 8. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{5x}{3x^3+6}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 9. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{x^2+2}{(x-1)(x^2-5x+1)}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 10. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

III) Développer des automatismes 2 : exponentielle et logarithme neperien

Exercice 11. —
Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x^2+1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\ln(x)} \ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} e^{2x^2+1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + \ln(1+x^4) \ ; \ \lim_{x\to0^+} x\ln(x) \ ; \ \lim_{x\to0} 2x + \ln(1+x^4) \ ; \ \lim_{x\to4^+} e^{2\ln(x-4)} \ ;$$

Exercice 12. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \ln(x^2 - x - 6)\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 13. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $[x \mapsto \ln(|x|)]$ aux bornes de son domaine de définition.

Feuille 2 – Existence et calculs de limites

Exercice 14. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \ln\left(e^{x^2}-1\right)\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

IV) Développer des automatismes 3 : fonctions trigonométriques et limites

Exercice 15. —
Démontrer que la fonction $[x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}]$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 16. —
Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+\sin^5(x) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(2x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(2x-1)}{\sqrt{-x}} \ ; \ \lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ ;$$

$$\lim_{x\to0} \ln\left(\cos(2x)\right) \ ; \ \lim_{x\to0} (x^4+2x-4)\sin(5x) \ ; \ \lim_{x\to2^+} \ln\left(\frac{\sin(x)}{(x-2)^2}\right) \ ; \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(4x) \ .$$

Exercice 17. —
Etudier l'existence de limites pour la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{20\cos(2\pi x)}{x+1}\right]$ aux bornes de son domaine de définition.

V) Quelques études de limites supplémentaires – Comportement asymptotique

Exercice 18. —
Lorsqu'elles existent, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{5e^{\sqrt{x}}}{x^{192}-3} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{\ln(3x)} \ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{x}}\sin(x) \ ; \ \lim_{x\to0^+} x^x \ ; \ \lim_{x\to0^+} (e^x-1)\ln(x) \ ; \ \lim_{x\to0} \frac{\sin^3(x)}{e^{2x}-1} \ .$$

Exercice 19. — Comportement asymptotique d'une fonction (I) —
On considère la fonction f définie par

$$f(x) := \frac{9x+2}{3x-1} \ .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Démontrer que f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.
3. Démontrer que f admet une asymptote verticale d'équation $x = \dfrac{1}{3}$.
4. La fonction f admet-elle une asymptote en $-\infty$?

Feuille 2 – Existence et calculs de limites

Exercice 20. — Comportement asymptotique d'une fonction (II) —
On considère la fonction g définie par

$$g(x) := 3x - 2 + e^{-2x}\sin(x) \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Etudier les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que la fonction g admet pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = 3x - 2$.
4. La fonction g admet-elle une droite asymptotique en $-\infty$?

Exercice 21. — Comportement asymptotique d'une fonction (III) —
On considère la fonction h définie par

$$h(x) := \sqrt{9x^2 + 6x + 3} \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction h.
2. Etudier les limites de la fonction h aux bornes de son domaine de définition.
3. Etudier l'existence d'une droite asymptotique en $+\infty$ pour la fonction h.

Exercice 22. — Comportement asymptotique d'une fonction (III) —
On considère la fonction α définie par

$$\alpha(x) := \frac{x^2 + x\ln(x)}{x^2 + 1} \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction α.
2. Etudier les limites de la fonction α aux bornes de son domaine de définition.
3. Déterminer les droites asymptotiques potentielles de la fonction α.