UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025

Licence 1 – Méthodes et Techniques de Calcul R. Abdellatif

Feuille 1 – Fonctions : premières notions et exemples fondamentaux

---

I) Les fonctions classiques : puissances et racines n-ièmes

Exercice 1. —

1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynomiales ? Le cas échéant, donner son degré et son coefficient constant.

$$f = \left[x \mapsto 3x^2 + 12x - 7\right] \ ; \qquad g = \left[x \mapsto 5x + 9 - \frac{2}{x}\right] \ ; \quad h = \left[x \mapsto \frac{4x^2+4x+1}{2x+1}\right] \ ;$$

$$\alpha = \left[x \mapsto 5x^3 - 2x + 3\cos(x)\right] \ ; \quad \beta = \left[x \mapsto 7x^{\frac{50}{2}} - 2\right] \ ; \quad \gamma = \left[x \mapsto \sqrt{3x^2+5-2x}\right] \ .$$

2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions rationnelles ?

$$f = \left[x \mapsto \frac{2}{x} - 10\right] \ ; \qquad g = \left[x \mapsto \frac{3x^2}{2x}\right] \ ; \qquad h = \left[x \mapsto \frac{5-x}{2\sqrt{x}+3}\right] \ ;$$

$$\alpha = \left[x \mapsto \frac{2\sqrt{x}+4}{2+\sqrt{x}}\right] \ ; \quad \beta = \left[x \mapsto \frac{e^x - 5}{2x^{\frac{5}{2}}+8}\right] \ ; \quad \gamma = \left[x \mapsto \frac{x^{42}-x^{21}}{x^{271}-12}\right] \ .$$

Exercice 2. —
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, puis en étudier la parité et la monotonie (sans recourir à l'utilisation des fonctions dérivées).

$$f = \left[x \mapsto 3x^2 + 12x - 7\right] \ ; \qquad g = \left[x \mapsto -7x^3 + 3\right] \ ; \qquad h = \left[x \mapsto (x^2+3)^2 - 49\right] \ ;$$

$$\alpha = \left[x \mapsto \frac{2}{x} - 10\right] \ ; \qquad \beta = \left[x \mapsto \frac{-2x+5}{x^2+4}\right] \ ; \qquad \gamma = \left[x \mapsto 5 - \sqrt[5]{x}\right] \ ;$$

$$A = \left[x \mapsto \frac{1}{5\sqrt{x}+2}\right] \ ; \quad B = \left[x \mapsto \sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1}\right] \ ; \quad C = \left[x \mapsto \sqrt{7x^2 - 4x - 3}\right] \ .$$

II) Les fonctions classiques : exponentielle et logarithmes

Exercice 3. —
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, puis en étudier la parité et la monotonie (sans recourir à l'utilisation des fonctions dérivées).

$$A = \left[x \mapsto \frac{e^{2x+1}}{e^{3x-4}}\right] \ ; \quad B = \left[x \mapsto \left(2e^{3x+2}\right)^3\right] \ ; \quad C = \left[x \mapsto \frac{1}{e^{-\frac{1}{x-3}}}\right] \ ; \qquad D = \left[x \mapsto \frac{2e^x}{e^{3x}-5}\right] \ ;$$

$$E = \left[x \mapsto \ln(1-x)\right] \quad F = \left[x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x-3}\right] \quad G = \left[x \mapsto \ln(|x|) + e^{-x}\right] \quad H = \left[x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 2}{3-x^2}\right)\right] \ .$$

Feuille 1 – Fonctions : premières notions et exemples fondamentaux

---

III) Les fonctions classiques : du côté de la trigonométrie

Exercice 4. —
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, puis étudier sa parité, sa périodicité et sa monotonie (sans recourir à l'utilisation des fonctions dérivées).

$$f = [x \mapsto 3\cos(x-5)] \ ; \ g = \left[x \mapsto \frac{2}{\sin(5x-\pi)}\right] \ ; \ h = \left[x \mapsto \tan\left(2x^2\right)\right] \ .$$

Exercice 5. —
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $-3 \leq f(x) \leq 3$.
2. Etudier la périodicité de la fonction f. Quelle propriété de sa représentation graphique en déduit-on ?
3. Etudier la parité de la fonction f. Quelle propriété de sa représentation graphique en déduit-on ?
   Indication : On pourra commencer par encadrer $2x + \frac{\pi}{2}$ *pour tout réel* $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 6. — Introduction à la trigonométrie hyperbolique —
On définit les fonctions ch, sh et th par les expressions suivantes :

$$\mathrm{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ; \ \mathrm{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ ; \ \mathrm{th}(x) := \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \ .$$

1. Etablir le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.
2. Etudier la parité de chacune de ces trois fonctions.
3. Démontrer la validité des formules suivantes pour tous réels x, y :
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \ ; \ \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}(2x) \ ; \ 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(2x) \ ;$$
$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) \ ; \ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \ .$$
4. Résoudre les équations suivantes : $\mathrm{ch}(x) = 0$; $\mathrm{sh}(2x) = 0$; $\mathrm{th}(x+3) = 0$.

IV) Premiers pas dans l'étude générale des fonctions

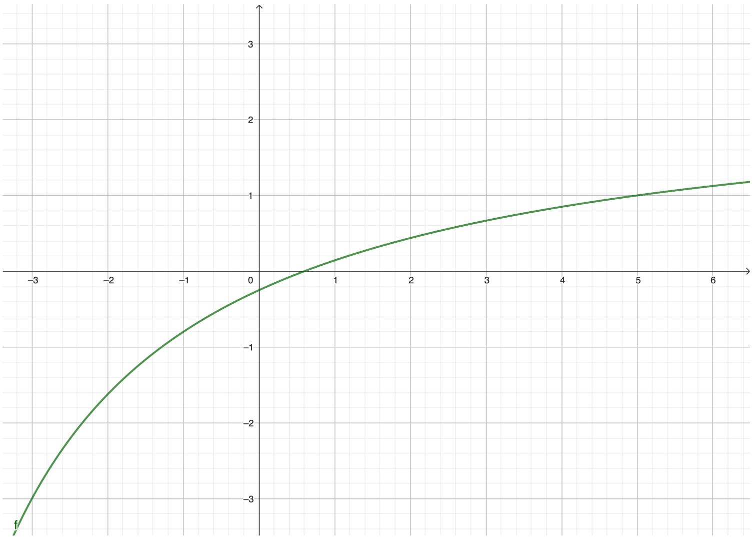
Exercice 7. —

1. Parmi les valeurs suivantes, lesquelles appartiennent à l'image de la fonction f définie par $f(x) := 5\sqrt{x} + 13$?
$$a = 12 \ ; \ b = -7 \ ; \ c = \sqrt{3} \ ; \ d = \pi \ .$$
2. Parmi les valeurs suivantes, lesquelles appartiennent au domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(3x+2) - 7$?
$$a = 12 \ ; \ b = -7 \ ; \ c = \sqrt{3} \ ; \ d = \pi \ .$$

Feuille 1 – Fonctions : premières notions et exemples fondamentaux

---

Exercice 8. —
Soit $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la fonction dont la représentation graphique est la suivante.



1. Déterminer les images par f des valeurs suivantes : 0 ; -3 ; -1.
2. Déterminer les antécédents par f des valeurs suivantes : $-0,4$; 0 ; 2.
   (On en donnera si nécessaire une approximation à $0,2$ par défaut près.)

Exercice 9. —
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x-3}{2x+12}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les images par f des valeurs suivantes : 0 ; -3 ; -1.
3. Déterminer les antécédents par f des valeurs suivantes : $-0,4$; 0 ; 2.

Exercice 10. — Etudier la parité et la monotonie (sans recourir à l'utilisation des fonctions dérivées) de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) \;; \qquad f_2 : y \mapsto \sqrt{3e^{y^2}+7} \;; \qquad f_3 : z \mapsto \frac{z^5+3z^3+2z}{5\ln(z)} \;;$$

$$f_4 : t \mapsto -e^{t^2} - 5t \;; \quad f_5 : x \mapsto 3\sin(x^2) + \sin(3x^2) \;; \quad f_6 : u \mapsto 12e^{u+3} - \cos 2u \;.$$