UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025

LICENCE 1 – MÉTHODES ET TECHNIQUES DE CALCUL R. ABDELLATIF

Révisions et compléments à l'entrée en L1

I) Opérations sur les puissances et identités remarquables

Exercice 1. —
Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un réel positif.

$$A = (3x-5)^2 - 15 \ ; \qquad B = \frac{64x^2-4}{4x+1} \ ; \qquad C = \frac{3^2 \times 7^3 x^5}{21x^3} \ ;$$

$$D = \sqrt{12x^2} + 7x\sqrt{3} - \sqrt{27} \ ; \quad E = \frac{\sqrt{125} - 2x\sqrt{20} + 6\sqrt{80}}{\sqrt{5x^4}} \ ; \quad F = \frac{(4-7x)^2}{2-\sqrt{7x}} \ .$$

Exercice 2. —
On considère l'expression $G = (2x+24)^2 - (2x-24)^2$.

1. Donner une expression réduite de G.
2. En déduire (sans calculatrice, évidemment) la valeur de $2024^2 - 1976^2$.

Exercice 3. —
Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un réel positif.

$$A = e^{3+\ln(8)} \ ; \qquad B = \frac{3e^{\ln(2x)}}{\ln(e^{-x})} \ ; \qquad C = e^{\ln(1-x)+\ln(x^3)} \ ;$$

$$D = \ln\left(\frac{e^{3x-2}}{4x^2}\right) \ ; \quad E = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \ ; \quad F = e^{\frac{x+2}{x}} e^{\frac{x-2}{x}} \ln\left(\frac{3x}{7e^{2x}}\right) \ .$$

II) Résolution d'(in)équations de petit degré

Exercice 4. —
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$16x^2 + 4x + 1 = 0 \ ; \quad 3x^2 - 7 = 8 \ ; \quad 5x^2 + 3x + 2 = 0 \ ; \quad 2x^4 + 3x^2 - 9 = 0 \ ;$$

$$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0 \ ; \quad (3x-5)e^{5x-2} = 0 \ ; \quad \ln(5x+2) = 42 \ ; \quad e^{2x-3} = 1 \ .$$

Exercice 5. —
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$x^2 - 2x + 5 \leq 4 \ ; \quad \frac{3x+2}{5x-3} > 1 \ ; \quad \frac{1}{2} \leq e^{2x-5} \leq 2 \ ; \quad e^{\frac{x-3}{x}} > 3 \ ;$$

$$\ln(2x-1) \geq -1 \ ; \quad \ln(3e^x) \geq 3x - 7 \ ; \quad \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(x) \ ; \quad \ln(x-2) \leq \ln(x^2 - 2x) \ .$$

Révisions et compléments à l'entrée en L1

III) Révisions de trigonométrie élémentaire

Exercice 6. —

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
   Indication : Utiliser le cercle trigonométrique et le théorème de Pythagore.
2. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, on a $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
3. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, on a $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice 7. —

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, on a
$$(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 2 .$$
2. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, on a
$$(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x) .$$

Exercice 8. —
Sachant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, déterminer la valeur exacte des expressions suivantes :
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \ ; \ \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \ ; \ 4\sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right) .$$

Exercice 9. —
Déterminer toutes les solutions dans $]-3\pi; 2\pi]$ de chacune des équations suivantes.
$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ 2\cos(x) + \sqrt{2} = 0 \ ; \ 2\tan(x) - \pi = 0 \ ; \ 5\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} .$$

Exercice 10. —
Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de chacune des trois inéquations suivantes.
$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ 2\sin(x) + 1 < 0 \ ; \ -2\sin(x) + \sqrt{3} \geq 0 .$$