TD 4 - Mise en œuvre d'une étude complète de fonction

Exercice 3. On pose $u(x) = |x-1|$, qui est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $h(x) = x - \sqrt{u(x)}$ quand h est définie.
1. Le seul problème dans la définition de h est la racine. Donc $h(x)$ est définie si et seulement si $\sqrt{u(x)}$ est définie, c'est-à-dire si $u(x)$ est défini et $\geqslant 0$. Comme $u(x)$ est défini et positif sur $\mathbb{R}$ (c'est une valeur absolue), on trouve que le domaine de définition de h est $\mathbb{R}$.
Pour la continuité, toutes les fonctions considérées (valeur absolue, racine, polynômes...) sont continues quand elles sont définies, comme composition de telles fonctions, la fonction h est continue en tout point de son domaine de définition : h est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour la dérivabilité,
- La fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme).
- La fonction $y \mapsto |y|$ est dérivable si et seulement si $y \neq 0$.

Par composition, la fonction $u : x \mapsto |x-1|$ est dérivable si et seulement si $x - 1 \neq 0$, i.e. si $x \neq 1$. Ensuite, la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ est dérivable si $z > 0$. Par composition, la fonction $[x \mapsto \sqrt{u(x)}]$ est dérivable si u est dérivable en x et si $|x-1| > 0$. Ces deux conditions sont équivalentes à $x \neq 1$, donc $[x \mapsto \sqrt{u(x)}]$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Enfin, comme la fonction $[x \mapsto x]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme), on trouve par combinaison linéaire que h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Si h est paire ou impaire, alors en particulier on a $h(-1) = \pm h(1)$. Or, on a

$$h(1) = 1 - \sqrt{|1-1|} = 1 \text{ et } h(-1) = -1 - \sqrt{|-1-1|} = -1 - \sqrt{2}.$$

Comme $h(-1)$ n'est égal ni à $h(1)$ ni à $-h(1)$, la fonction h n'est ni paire ni impaire.

3. Pour calculer la dérivée de h, on décompose la valeur absolue. Par définition, on a

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1, \\ -x+1 & \text{si } x-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1. \end{cases}$$

On a donc

$$h(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1, \\ x - \sqrt{1-x} & \text{si } x \leqslant 1. \end{cases}$$

On calcule la dérivée en suivant chacune de ces deux formules :
- Si $x > 1$, on a $u(x) = x-1$ et $u'(x) = 1$. On a alors

$$h'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

- Si $x < 1$, on a $u(x) = 1-x$ et $u'(x) = -1$. On a alors

$$h'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

On obtient la formule globale

$$\forall x \neq 1, h'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1, \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

4. Pour dresser le tableau de variation de h, on détermine le signe de la dérivée h'. Comme on a deux formules distinctes selon que x est strictement supérieur ou strictement inférieur à 1, on sépare l'étude en deux cas :

— Si $x > 1$, on doit déterminer le signe de $1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. On a

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Comme une racine est toujours positive, on peut multiplier à gauche et à droite par $\sqrt{x-1}$ sans changer le sens de l'inégalité, on obtient

$$h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geqslant \frac{1}{2}$$

Comme les deux quantités sont positives, on peut passer au carré dans l'inégalité ci dessus (ce qui n'est pas possible si l'une des quantités est négatives, et il faudrait changer le sens de l'inégalité si les deux quantités sont négatives). On a alors

$$h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 = x - 1 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geqslant 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Donc $h'(x) \leqslant 0$ pour $x \in]1, 5/4]$ et $h'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [5/4, +\infty[$.

— Si $x < 1$, on doit déterminer le signe de $1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Comme une racine est toujours positive, on a que $\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \geqslant 0$, et donc $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$.

Au final, on obtient le tableau de signes/variations suivant.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$1+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$		$+$	‖				
$1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$			‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

5. Comme la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle n'admet aucune asymptote verticale (une telle asymptote serait le témoin d'une limite infinie en un point de $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas possible car h est continue). Pour les asymptotes horizontales et obliques, nous devons calculer les limites de h en $\pm\infty$.

— <u>En $-\infty$:</u> D'abord, pour x assez petit, on a $h(x) = x - \sqrt{1-x}$. En effectuant le changement de variable $y = -x$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{1-x} = \lim_{y\to+\infty} -y - \sqrt{1+y}.$$

Comme $\lim_{y\to+\infty} -y = -\infty = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{1+y}$, on trouve que $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$. En particulier h n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$, mais elle admet peut-être une asymptote oblique. Soit une droite d'équation $mx + p$. Cette droite est une asymptote oblique à h en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to-\infty} h(x) - (mx + p) = 0$. À nouveau, pour x assez petit et avec le changement de variables $y = -x$, on a

$$\begin{aligned}
h(x) - (mx + p) &= h(-y) - (p - my) \\
&= -y - \sqrt{1+y} - p + my \\
&= (m-1)y - \sqrt{1+y} - p \\
&= \sqrt{y}\left((m-1)\sqrt{y} - \sqrt{\frac{1}{y} + 1} - \frac{p}{\sqrt{y}}\right)
\end{aligned}$$

Quand x tends vers $-\infty$, y tends vers $+\infty$, et $\sqrt{y}$ tends vers $+\infty$. Pour que $h(x)-(mx+p)$ tende vers 0, il faut alors au moins que le second membre entre parenthèse tende vers 0 (mais ça ne suffit pas forcément !). Comme $\sqrt{\frac{1}{y}+1}$ et $-\frac{p}{\sqrt{y}}$ tendent tous les deux vers 0, on a

$$\lim_{y\to+\infty}(m-1)\sqrt{y}-\sqrt{\frac{1}{y}+1}-\frac{p}{\sqrt{y}}=\lim_{y\to+\infty}(m-1)\sqrt{y}.$$

Si $m\neq 1$, cette limite est infinie, donc il faut avoir $m=1$.
Maintenant si $m=1$, on a

$$h(x)-(x+p)=-\sqrt{1-x}-p.$$

Comme ceci ne tends jamais vers 0 quand x tends vers $-\infty$, la fonction h n'admet pas d'asymptote oblique en $-\infty$.

— En $+\infty$: D'abord, pour x assez grand, on a alors

$$\begin{aligned}h(x)&=x-\sqrt{x-1}\\&=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, on trouve que $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. En particulier h n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, mais elle admet peut-être une asymptote oblique. Soit une droite d'équation $mx+p$. Cette droite est une asymptote oblique à h en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}h(x)-(mx+p)=0$. À nouveau, pour x assez grand

$$\begin{aligned}h(x)-(mx+p)&=x-\sqrt{x-1}-mx-p\\&=(1-m)x-\sqrt{x-1}-p\qquad=\sqrt{x}\left((1-m)\sqrt{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{p}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Quand x tends vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ tends vers $+\infty$. Pour que $h(x)-(mx+p)$ tende vers 0, il faut alors au moins que le second membre entre parenthèse tende vers 0 (mais ça ne suffit pas forcément !). Comme $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ et $-\frac{p}{\sqrt{x}}$ tendent tous les deux vers 0, on a

$$\lim_{x\to+\infty}(1-m)\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\frac{p}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}(1-m)\sqrt{x}.$$

Si $m\neq 1$, cette limite est infinie, donc il faut avoir $m=1$.
Maintenant si $m=1$, on a

$$h(x)-(x+p)=-\sqrt{x-1}-p.$$

Comme ceci ne tends jamais vers 0 quand x tends vers $+\infty$, la fonction h n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Au final, nous avons montré que h n'admet aucune asymptote...

6.

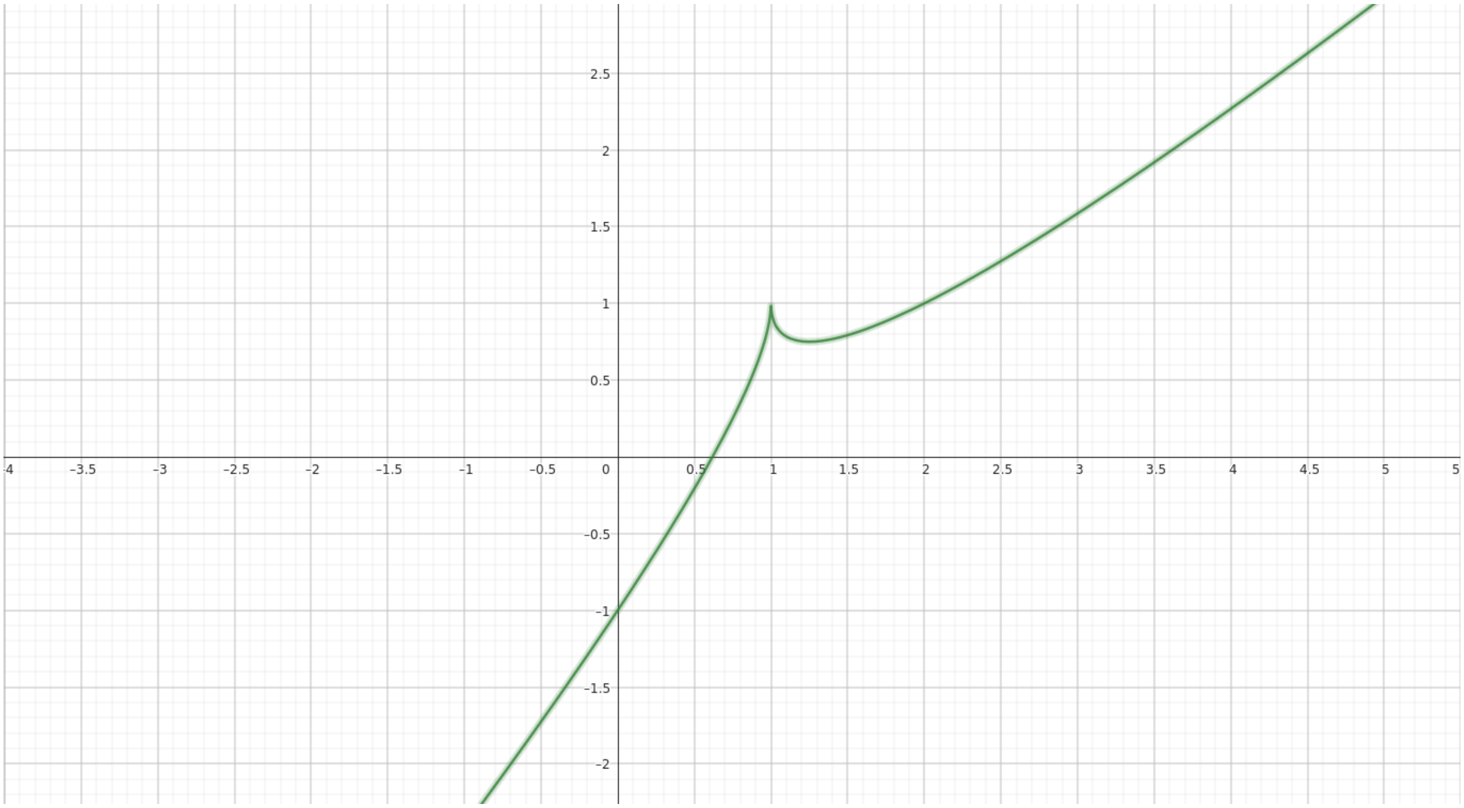

Figure 1 – Graphe de h

Exercice 5. On commence par déterminer le domaine de définition de f. On pose $u(x) = x^2 - 2x + 3$. Il s'agit d'un polynôme, donc défini sur $\mathbb{R}$. On pose ensuite $v(x) = -x^2$, qui est également un polynôme, donc défini sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, on déduit que $f(x) = u(x)e^{v(x)}$ est défini sur $\mathbb{R}$.

On détermine ensuite le domaine de continuité (resp. de dérivabilité) de f. Comme u et v sont des polynômes, ils sont continus et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme l'exponentielle est également continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on trouve là encore par produit et composition que $f(x) = u(x)e^{v(x)}$ est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

On constate que f n'est ni paire ni impaire. En effet, on a

$$f(1) = (1^2 - 2 + 3)e^{-1^2} = \frac{2}{e} \text{ et } f(-1) = ((-1)^2 + 2 + 3)e^{-(-1)^2} = 6e$$

donc $f(-1)$ n'est égal ni à $f(1)$ ni à $f(-1)$.

On a vu que le fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour calculer la dérivé, on utilise la formule du produit. On a

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 2x + 3, & u'(x) &= 2x - 2, \\ e^{v(x)} &= e^{-x^2}, & (e^{v(x)})' &= v'(x)e^{v(x)} = -2xe^{-x^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u(x)e^{v(x)})' \\ &= u'(x)e^{v(x)} + u(x)(e^{v(x)})' \\ &= u'(x)e^{v(x)} + u(x)v'(x)e^{v(x)} \\ &= (u'(x) + u(x)v'(x))e^{v(x)} \end{aligned}$$

$$= (2x - 2 + (x^2 - 2x + 3)(-2x))e^{-x^2}$$
$$= (2x - 1 - 2x^3 + 4x^2 - 6x)e^{-x^2}$$
$$= (-2x^3 + 4x^2 - 4x - 1)e^{-x^2}$$

Pour connaître les variations de f, on cherche à calculer le signe de $f'(x)$. Comme $f'(x)$ s'écrit comme un produit d'un polynôme $P(x) = -2x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ et d'une exponentielle e^{-x^2}. Comme une exponentielle est toujours positive, le signe de f est le même que celui de $P(x)$.
Le polynôme $P(x)$ n'a pas de racine évidente qui nous permettrait de le factoriser. Pour calculer le signe de $P(x)$, on tente de calculer la dérivée. On a

$$P'(x) = -6x^2 + 8x - 4$$

Pour connaître le signe de $P'(x)$, on calcule $\Delta = 8^2 - 4.(-6).(-4) = 64 - 90 = -26 < 0$. Comme le coefficient dominant de $P'(x)$ est négatif, on en déduit que $P'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc que $P(x)$ est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$. Comme $P(-1) = 1$ et $P(0) = -1$ et comme $P(x)$ est continu (c'est un polynôme), on trouve par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un $x_1 \in]-1, 0[$ tel que $P(x_1) = 0$. Comme $P(x)$ est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$, on trouve le tableau de signes/variations suivant.

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

On s'intéresse maintenant au éventuelles asymptotes de f. Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, les seules possibilités sont des asymptotes en $\pm\infty$. Quand x tend vers $\pm\infty$, $-x^2$ tend vers $-\infty$. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 2x + 3)e^{-x^2} = 0.$$

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. (Notons que les limites en $\pm\infty$ peuvent être ajoutées sur le tableau de variation de f).

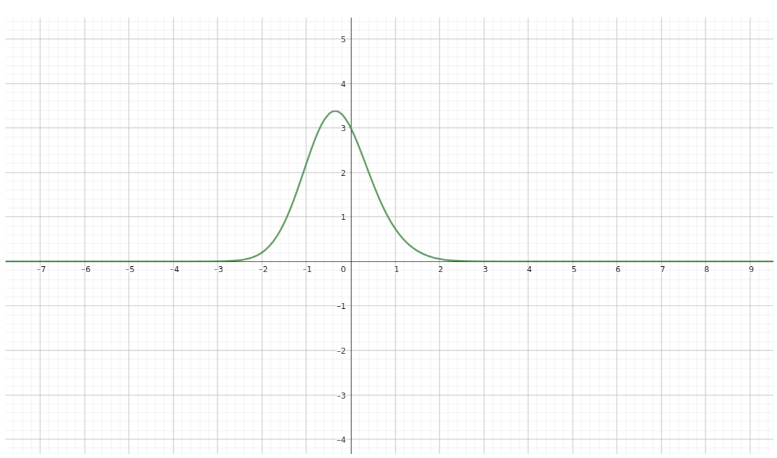

Figure 2 – Graphe de f

Exercice 8. On pose $u(z) = z^5+3z^3+2z$ et $v(z) = 5\ln(z)$. Comme $u(z)$ est un polynôme, la fonction $\ell(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ est définie si et seulement si $v(z)$ est défini et non nul. On trouve donc les conditions $z > 0$ (pour que $v(z)$ soit défini) et $\ln(z) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 1$ pour que $v(z)$ soit non nul. Le domaine de définition est donc

$$\mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Comme ce domaine n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction ℓ n'est ni paire ni impaire. Comme les fonctions u et v sont continues et dérivables là où elles sont définies, et comme $v(z) \neq 0$ sur le domaine de définition de ℓ, on trouve que, par quotient, la fonction ℓ est continue et dérivable en tout point de son domaine.

On a

$$\begin{aligned} u(z) &= z^5+3z^3+2z, & u'(z) &= 5z^4+9z^2+2, \\ v(z) &= 5\ln(z), & v'(z) &= \tfrac{5}{z}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de dérivation des quotients, on obtient

$$\begin{aligned} \ell'(z) = \left(\frac{u(z)}{v(z)}\right) &= \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{(v(z))^2} \\ &= \frac{5(5z^4+9z^2+2)\ln(z) - 5z^4 - 15z^2 - 10}{25\ln^2(z)} \\ &= \frac{(5z^4+9z^2+2)\ln(z) - z^4 - 3z^2 - 2}{5\ln^2(z)} \\ &= \frac{z^4(5\ln(z)-1) + z^2(9\ln(z)-3) + 2(\ln(z)-1)}{5\ln^2(z)} \end{aligned}$$

En l'état, nous ne sommes pas en mesure de déterminer parfaitement le signe de cette expressions. On peut néanmoins dire que

- Comme $5\ln^2(z)$ est toujours strictement positif sur le domaine, le signe de $\ell'(z)$ est le même que celui de $z^4(5\ln(z)-1) + z^2(9\ln(z)-3) + 2(\ln(z)-1)$.
- Si $z \in]0,1[$, alors $z > 0$ et $\ln(z) < 0$, et donc $z^4(5\ln(z)-1)+z^2(9\ln(z)-3)+2(\ln(z)-1)$ comme somme de nombres négatifs. On en déduit que ℓ est décroissante sur $]0,1[$.
- Si $z \geqslant e$, alors $\ln(z) > 1$, et donc

  $$z^4(5\ln(z)-1) + z^2(9\ln(z)-3) + 2(\ln(z)-1) \geqslant z^4(5-1) + z^2(9-4) + 2(\ln(z)-1) = 4z^4 + 5z^2 > 0$$

  on sait donc que ℓ est croissante sur $[e,+\infty[$.

On peut donc tracer le tableau de variation partiel (pour une fois, les hachures ne représentent pas le fait que la fonction n'est pas définie, juste le fait que l'on ne connaît pas le comportement de la fonction sur cet intervalle).

z	0		1		e		$+\infty$
$\ell'(z)$	‖	$-$	‖	?	?	$+$	
$\ell(x)$	‖	$\searrow$	‖			$\nearrow$	

Pour calculer les éventuelles asymptotes de ℓ, on calcule les limites de ℓ aux bornes de son domaine de définition.

- En 0^+. Comme la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{z\to 0^+} u(z) = 0^5 + 3.0^3 + 2.0 = 0$. Comme $\lim_{z\to 0^+} v(z) = -\infty$, on obtient que $\lim_{z\to 0^+} \ell(z) = 0^-$.
- En 1^-. Comme la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{z\to 1} u(z) = 1^5 + 3.1^3 + 2 = 5$. Comme $\lim_{z\to 1^-} v(z) = 0^-$, on obtient que $\lim_{z\to 1^-} \ell(z) = -\infty$.
- En 1^+. Comme la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{z\to 1} u(z) = 1^5 + 3.1^3 + 2 = 5$. Comme $\lim_{z\to 1^+} v(z) = 0^+$, on obtient que $\lim_{z\to 1^+} \ell(z) = +\infty$.

— En $+\infty$. On sait par croissance comparée que $\lim_{z\to+\infty} \frac{z}{\ln(z)} = +\infty$. On a donc

$$\lim_{z\to+\infty} \ell(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{z}{5\ln(z)}(z^4 + 3z^2 + 2) = +\infty.$$

On sait donc qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = 1$ (pas d'asymptote d'équation $x = 0$, car la limite de $\ell(z)$ en 0 n'est pas infinie). Comme la limite de $\ell(z)$ en $+\infty$ est $+\infty$, la seule éventualité est une asymptote oblique, disons d'équation $y = mx + p$. On aurait alors

$$\lim_{z\to+\infty} \ell(z) - mz - p = 0.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\ell(z) - mz - p &= \frac{z^5 + 3z^3 + 2z - 5\ln(z)mz - 5\ln(z)p}{5\ln(z)} \\ &= z^5 \frac{1 + \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z^4} - \frac{5m\ln(z)}{z^4} - \frac{5p\ln(z)}{z^5}}{5\ln(z)}\end{aligned}$$

Par croissance comparée, le numérateur tend vers 1, la limite de $\ell(z) - mz - p$ en $+\infty$ est donc

$$\lim_{z\to+\infty} \ell(z) - mz - p = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^5}{5\ln(z)} = +\infty \neq 0$$

donc la fonction ℓ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

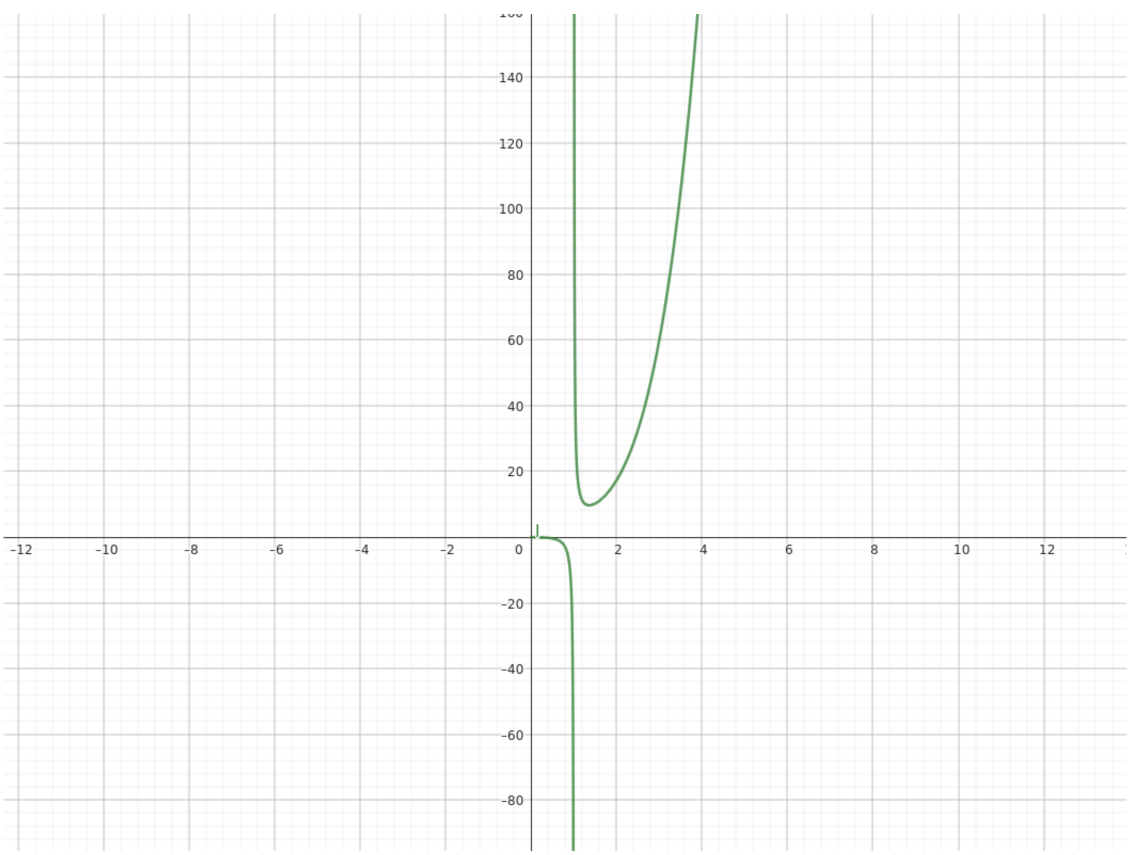

FIGURE 3 – Graphe de ℓ