TD 9

Méthodes et techniques de calcul

Exercice I

Résoudre les équations différentielles suivantes. On suivra le plan usuel de résolution :

- Ecrire l'équation homogène associée.
- Ecrire puis résoudre l'équation caractéristique.
- Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
- Rechercher une solution particulière de l'équation.
- Donner la solution générale de l'équation.

$y'' - 3y' + 2y = x^2$, $\quad y'' - 4y' + 3y = cos(x)$, $\quad y'' + 4y' + 4y = e^x$

$y'' + y' + y = cos(3x)$, $\quad y'' - y' - 6y = xe^{-2x}$, $\quad y'' - 2y = ch(x)t$

Exercice II

Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner- si elle existe- la solution sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = a$ et $f'(x_1) = b$

$y'' + 2y' + y = x^3 + 1$, $\quad x_0 = x_1 = 1$, $\quad a = 1, b = 2$

$y'' + 3y' - y = (x-1)e^x$, $\quad x_0 = 0, x_1 = 1, a = 1, b = 1$

Exercice III (Physique)

On considère une masse suspendue au bout d'un ressort. La position y de cette masse peut être repérée sur un axe parallèle à l'axe du ressort est commandé par l'équation

$$y'' + \gamma y' + cy = 0$$

La fonction $y = 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$, Physiquement cette solution correspond au fait que la masse est immobile, c'est une "position d'équilibre", cet équilibre est "stable" lorsque les solutions non nulles φ satisfont $Lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0$, il est instable sinon.

1)Dans l'équation le terme cy correspond à une force de rappel si ($c > 0$) et le terme $\gamma y'$ correspond à une force de frottement ($\gamma > 0$). La position d'équilibre est elle stable ou instable?

2) Que dire de l'équilibre si $c < 0$? si $\gamma < 0$?

Exercice IV

Soit l'équation (E) : $\quad x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

1) Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose $t = ln(x)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + 4y(e^y) = 0$. On pose pour tout réel t, $z(t) = y(e^t)$. Calculer les expressions de la fonction dérivée et de la fonction dérivée seconde de la fonction z. En déduire que la fonction z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation linéaire homogène du second ordre à coefficient constant.

2) En déduire les expressions des solutions sur $]0, +\infty[$ de (E).