TD 8 et 9

† *Équations différentielles linéaires du premier ordre*

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$2y' + 3y = x^2 + x + 1, \quad y' + 2y = (x^3+1)e^{x^2}, \quad y' + y = \sin(x) - \cos(x)$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$. Pour chacune d'entre elles on précisera l'équation homogène associée ainsi que ses solutions.

$$\begin{array}{ll} y' + xy = x, & y' + 3x^2y = 6x^2, \\ y' + e^{-x}y = xe^{e^{-x}}, & (x^2+1)y' - y = e^{\arctan(x)} \end{array}$$

† *Recollement*

Exercice 3. (Extrait d'examen)

1. Quel est le domaine de définition de la fonction d'expression $\frac{x+2}{x+1}$.
2. Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ pouvez-vous appliquer la technique de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre pour l'équation

$$(E) \ : \ (x+1)y' - (x+2)y = (x+1)xe^x$$

3. Résoudre (E) sur chacun des intervalles trouvés précédemment.
4. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?
5. Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.

† *Conditions initiales*

Exercice 4. Pour chacune des équations différentielles suivantes déterminer -si elle existe- la solution maximale (c'est-à-dire sur le plus grand intervalle possible) satisfaisant la condition $f(x_0) = a$.

$$\begin{array}{lll} (x^2+1)y' - 2y = xe^{2\arctan(x)} & x_0 = 0 & a = 1 \\ (x+1)y' + y = x^2 & x_0 = 0 & a = 0 \\ y' - x\ln(x)y = 1 - x^2\ln(x) & x_0 = 2 & a = e^{2\ln(2)} \end{array}$$

† *Applications aux sciences*

Exercice 5. (Physique)

1. Les physiciens savent que *"La quantité de toute substance radioactive décroit à un taux qui est proportionnel à la quantité présente"*. Par quelle équation différentielle du premier ordre cette loi physique peut-elle être représentée ?
2. Soit $Q(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ satisfaisant

$$\forall t \geqslant 0, Q'(t) = -kQ(t)$$

avec k une constante positive. Montrer que quelle que soit la valeur de $Q(0)$, il existe une unique valeur de t_0 (toujours la même) telle que $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$. Exprimer t_0 à l'aide de k.

3. Une substance radioactive a une demi-vie de 10 jours. Au début de l'expérience on a $28mg$ de cette substance, combien en reste-t-il au bout de 8 jours ?

Exercice 6. (Physique)
Lorsqu'un objet est lâché d'une certaine hauteur, il chute verticalement, on notera $x(t)$ la distance parcourue par l'objet à l'instant t, avec $x(0) = 0$.

1. En négligeant la résistance de l'air, par les lois de Newton, on a $x''(t) = g$. En déduire $x(t)$ en fonction de g (on notera $x'(0)$ la vitesse initiale).
2. Si on ne néglige pas la résistance de l'air, alors l'objet subit une force de direction opposée à son mouvement et proportionnelle à sa vitesse. On a alors

$$\forall t \geqslant 0, \quad x''(t) = g - \frac{k}{m}x'(t)$$

Exprimer $x(t)$ en fonction de g, m, k et $v_0 = x'(0)$ la vitesse initiale.

† *Équations d'ordre 2*

Exercice 7. Résoudre les équations différentielle suivantes. On suivra le plan usuel :

- Écrire l'équation homogène associée.
- Écrire puis résoudre l'équation caractéristique.
- Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
- Rechercher une solution particulière de l'équation.
- Donner les solution générale de l'équation.

$$\begin{array}{lll} y'' - 3y' + 2y = x^2, & y'' - 4y' + 3y = \cos(x), & y'' + 4y' + 4y = e^x \\ y'' + y' + y = \cos(3x), & y'' - y' - 6y = xe^{-2x}, & y'' - 2y = x\mathrm{ch}(x) \end{array}$$

Exercice 8. Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner -si elle existe- la solution sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = a$ et $f'(x_1) = b$.

$$\begin{array}{lll} y'' + 2y' + y = x^3 + 1, & x_0 = x_1 = 1, & a = 1, b = 2 \\ y'' + 3y' - y = (x-1)e^x, & x_0 = 0, x_1 = 1, & a = 1, b = 1 \end{array}$$

Exercice 9. (Extrait d'examen) Soit l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

1. Donner l'équation homogène associée (EH).
2. Donner l'équation caractéristique associée (EC).
3. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de (EH).
4. Chercher une solution de (E) parmi les fonctions de la forme ax^2e^{2x}.
5. Donner les solutions de (E).