UPJV 2021-2022

UFR Sciences

TD 8

Méthodes et techniques de calcul

† *Equations différentielles linéaires du premier ordre*

Exercice I

Résoudre sur **IR** les équations différentielles suivantes :

$2y' + 3y = x^2 + x + 1, \quad y' + 2y = (x^3 + 1)e^{x^2}, \quad y' + y = sin(x) - cos(x)$

Exercice II

Résoudre les équations différentielles suivantes sur **IR**. Pour chacune d'entre elles on précisera l'équation homogène associée ainsi que ses solutions.

$y' + xy = x, \quad y' + 3x^2y = 6x^2, \quad y' + e^{-x}y = xe^{e^{-x}}$

$(x^2 + 1)y' - y = e^{Arctg(x)}$

Exercice III

1) Domaine de définition et fonction dérivée de la fonction $A(x) = xln(x) - x$.

2) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation linéaire du premier ordre

$$(EH) : \quad y' - ln(x).y = 0$$

3) Chercher une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' - ln(x).y = xe^{xln(x)-x}$$

parmi les fonctions de la forme $K(x)e^{x.ln(x)-x}$ avec K une fonction dérivable.

4) Quelles sont les solutions sur $]0, +\infty[$ de (E)?

† *Recollement*

Exercice IV (extrait d'examen)

1) Quel est le domaine de définition de la fonction d'expression $\frac{x+2}{x+1}$

2) Sur quels intervalles de **IR** pouvez-vous appliquer la technique de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre pour l'équation

$$(E) : (x + 1)y' - (x + 2)y = (x + 1)xe^x.$$

3) Résoudre (E) sur chacun des intervalles trouvés précédement.

4) Cette équation admet-elle des solutions sur **IR**?

Donner l'ensemble des solutions sur **IR**.

Exercice V

Pour chacune des équations différentielles suivantes déterminer - si elles existent - les solutions sur **IR**

a) $(x - 1)(x + 1)y' - (3x + 1)y = 3(x - 1)^2$,

b) $\frac{1}{x}y' - y = 2 - x^2$

† *Conditions initiales*

Exercice VI

Pour chacune des équations différentielles suivantes déterminer -si elle existe- la solution maximale (c'est-à-dire sur le plus grand intervalle possible) satisfaisant la condition $f(x_0) = a$

$(x^2 + 1)y' - 2y = xe^{2Arctg(x)}, \quad x_0 = 0, \quad a = 1$

$(x + 1)y' + y = x^2, \quad x_0 = 0, \quad a = 0$

$y' - xln(x)y = 1 - x^2 ln(x), \quad x = 2, \quad a = e^{2ln(2)}$

† *Changement de fonction inconnue*

Exercice VII

Soit (B) l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

où P et Q sont des fonctions connues et n un entier naturel connu.

1) L'équation (B) est-elle linéaire pour certaines valeurs de n? si oui lesquelles?

2) On suppose que $n > 1$. Montrer que si y est une solution de (B) sur un intervalle donné I qui ne s'annule nulle part sur I alors la fonction $z = y^{1-n}$ est solution d'une équation linéaire du premier ordre que l'on determinera.

3) Résoudre l'équation $y' + y = y^3$.

† *Applications aux sciences*

Exercice VIII (Economie)

En économie, en théorie des enchères (c'est un mélange de théorie économique et de théorie des jeux) apparait l'équation différentielle suivante

$$y'h(x) + h'(x)y = xh'(x)$$

(la variable x représentant l'estimation du prix de l'objet en vente) et h est une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ qui est connue et qui ne s'annule nulle part.

Exprimer à l'aide de h la solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation qui vaut a lorsque $x = 0$.

Exercice IX (Physique)

Une pincée de physique :

1) Les physiciens savent que

"*La quantité de toute substance radio-active décroit à un taux qui est proportionnel à la quantité présente*".

Par quelle équation différentielle du premier ordre cette loi physique peut-elle être représentée?

2) Soit $Q(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ satisfaisant $\forall t \geq 0, \quad Q'(t) = -kQ(t)$ avec k une constante positive.

Montrer que quelle que soit la valeur de $Q(0)$, il existe une unique valeur de t_0 (toujours la même) telle que $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$. Exprimer t_0 à l'aide de k.

3) La demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécéssaire pour que la radioactivité

d'une quantité de cet élément diminue de moitié.
Une substance radioactive a une demi-vie de 10 jours. Au début de l'expérience on a 28 mg de cette substance, combien en reste-t'il au bout de 8 jours?

Exercice X (un problème de vidange)
Un réservoir contient 1000 litres d'une saumure (solution d'eau et de sel) de concentration de 20g par litre. On verse dans ce réservoir une saumure de concentration de 5g par litre, et ce à un rythme de 10 litres par seconde, le réservoir est simultanément vidangé (par un autre tuyau) au même rythme. On suppose que l'homogéinisation de la solution est instantanée (c'est-à-dire que la concentration est à chaque instant la même en tous les points du réservoir)
Proposer une équation linéaire du premier ordre dont une solution est la fonction représentant la concentration en sel en fonction du temps. Au bout de combien de temps la concentration en sel de la saumure contenue dans ce réservoir est de 10g par litre?

Exercice XI (Physique)
Lorsqu'un objet est laché du haut d'une falaise (en surplomb) il chute verticalement. $x(t)$ notera dans la suite la distance parcourue par l'objet à l'instant t. ($x(0) = 0$)
1) Si on néglige la résistance de l'air il subit une accélération constante g. On a donc $x''(t) = g$.
Exprimer $x(t)$ en fonction de g.
2) Si on ne néglige pas la résistance de l'air alors l'objet subit une force de direction opposée à son mouvement et proportionnelle à sa vitesse (c'est une approximation acceptable pour de petites vitesses)
Donc la résultante des forces subies par l'objet est $F = mg - kv$. Où m est la masse de l'objet, v sa vitesse et k une constante qui dépend de la forme de l'objet.
Vérifier que $x(t)$ satisfait

$$\forall t \geq 0, \quad x''(t) = g - \frac{k}{m} x'(t)$$

Exprimer $x(t)$ en fonction de g, m, k et $v_0 = x'(0)$ la vitesse initiale.

Exercice XII (Gestion d'une ressource renouvelable)
Il est fréquent de vouloir prélever une ressource naturelle renouvelable. Pour fixer les idées nous prendrons l'exemple des poissons d'un secteur maritime donné. Il est souhaitable que ce prélèvement s'opère de manière à ce que la ressource ne s'épuise pas. On va modéliser ce problème. On notera $P(t)$ la taille de la population de poissons présente à l'instant t.
1) Modèle de Malthus : On suppose que la population a un taux de reproduction constant $k > 0$. la fonction P satisfait alors l'équation différentielle

$$P'(t) = kP(t)$$

Donner les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}^+$. Tracer l'allure du graphe de P.

Quelle est la signification concrète de cette courbe?
Dans le cas d'une population de poissons cela vous semble-t'il représenter correctement la réalité? Pouvez-vous donner un exemple concret où les prédictions de ce modèle vous semble raisonnablement coller à la réalité?
2) Modèle de Verhulst :
On suppose que le milieu dans lequel la population vit est capable de nourrir une population en équilibre avec les ressources alimentaires P_E : si la population excède P_E son taux de reproduction diminue - par manque de nourriture- dans le cas contraire - surabondance de nourriture - il augmente ceci mène à une équation modifiée :

$$P'(t) = k(1 - \frac{P(t)}{P_E})P(t)$$

qui n'est pas linéaire mais à "variables séparables".
On suppose que $k = 2$ et $P_I = 1$.
a) Décomposer en somme d' "éléments simples" la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{P(1-P)}$.
Puis donner les primitives de f sur les intervalles où elles existent.
b) Montrer que les fonctions solutions de l'équation satisfont

$$ln(|P(1 - P)|) = 2t + \lambda$$

où λ est un réel que l'on peut choisir arbitrairement.
c) Donner les solutions telles que $P(0) = 1$, $P(0) = 1/2$ et $P(0) = 2$. Tracer les graphes correspondant. Observer, que pensez-vous de ce modèle?
3) Le "taux de reproduction" de la question 1 est *a priori* la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité, en cas de pêche que pouvez-vous dire de ce taux?

† *Pour aller un peu plus loin*

Exercice XIII

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes
$(1 + x^2)y'' - (1 + x)y' = 3, \quad xy^2 + 2yy = x^2.$

Exercice XIV

Trouver toutes les fonctions définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}$ satisfaisant pour tout réel x

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(2)$$

Exercice XV

Trouver les fonctions définies continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'origine est le milieu du segment de l'axe des ordonnées d'extrémités $(0, f(x))$ et $P(x)$ où $P(x)$ est l'intersection de la tangente au point d'abcsisse x avec l'axe des ordonnées.