UPJV 2021-2022

UFR Sciences

TD 7

Méthodes et techniques de calcul

† *Calcul d'intégrales.*

Exercice I

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (3t^2+2t-1)dt$, $\int_0^\pi sin(2t)dt$, $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+4}dt$

$\int_0^2 x^2+e^x-sin(x)dx$, $\int_0^\pi sin(x)dx$, $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx$

Exercice II

En utilisant une ou plusieurs intégrations par partie calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (2x+1)e^x dx$, $\int_0^\pi (x+4)sin(x)dx$, $\int_0^4 (x^2+x+1)e^x dx$, $\int_{-2}^2 x^2e^{2x}dx$,

$\int_0^{\sqrt{3}} Arctg(x)dx$, $\int_0^{\pi/2} sin^2(x)$, $\int_1^2 ln(x)dx$, $\int_1^2 x^2ln(x)dx$

Exercice III

En utilisant les changements de variable indiqués calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 e^x sin(e^x)dx \quad (t=e^x)$, $\int_0^{\pi/4} \frac{cos(x)}{sin^3(x)}dx \quad (t=sin(x))$

$\int_1^2 \frac{sin(ln(x))}{x}dx \quad (t=ln(x)$, $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{Arctg(x)}{1+x^2}dx \quad (t=Arctg(x))$

$\int_0^{\pi/2} sin(sin(x))cos(x)dx \quad (t=sin(x))$, $\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx \quad (t=e^x)$

Exercice IV

Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$$

a) Quel est le domaine de définition de f?

Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}$$

b) Calculer $\int_0^1 f(t)dt$

Exercice V

Soit g la fonction définie par la formule

$$g(x)=\frac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

a) Quel est le domaine de définition de g?

Montrer que $g(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{e}{x-1}$$

b) Calculer $\int_0^{(1/2)} g(t)dt$

† *Exercices théoriques*

Exercice VI

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$,$(a < b)$ et satisfaisant

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice VII

Pour l'entier non nul n on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$
1) Expliquer pourquoi cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
2) Exprimer $I_{n+1}(x)$ à l'aide de $I_n(x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
3) Donner les expressions (sans utiliser le symbole $\int$) de $I_1(x), I_2(x)$ et $I_3(x)$.

Exercice VIII

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$de $\mathbf{R}$, on suppose que pour tout $t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$.
Montrer que $m \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq M$

† *Applications aux sciences*

Exercice IX (aires)

L'aire algébrique entre une courbe représentant la fonction f et l'axe des abscisses entre l'abscisse a et l'abscisse b est $\int_a^b f(t)dt$.
Avec un tout petit peu d'initiative on peut utiliser cela pour calculer l'aire (non algébrique) de surface comprise entre deux courbes..
1) Calculer l'aire comprise entre les paraboles d'équation
$(P_1) : y = x^2 - 8x + 14$ et $(P_2) : y = -x^2 - 4x + 15$
2) Calculer l'aire comprise entre les courbes représentant
$f(x) = sin(x)cos(x)$ et $g(x) = sin(x)$; $0 \leq x \leq \pi$