UPJV 2021-2022

UFR Sciences

TD 3

Méthodes et techniques de calcul

† *Bijections, bijections réciproques*

Exercice I

Déterminer si les fonctions suivantes sont des bijections. Dans le cas où la fonction est une bijection calculer la bijection réciproque.

$f_1 : [0,1] \to [0,1]; x \mapsto f_1(x) = 1 - x$; $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}; x \mapsto f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
$f_3 : [-1,1] \to [0,1]; x \mapsto f_3(x) = 1 - x^2$; $f_4 : [0,1] \to [0,1]; x \mapsto f_4(x) = 1 - x^2$.

Exercice II

1) Montrer que la fonction $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.
2) On notera $Argsh$ sa bijection réciproque. Montrer que $Argsh$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer l'expression de sa dérivée.
3) Donner l'allure du graphe de $Argsh$

Exercice III

1) La fonction $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est elle bijective?
2) Montrer que $ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bijective.
3) On note $Argch$ la bijection réciproque de la fonction de la question 2). Quel est son domaine de dérivabilité? Calculer l'expression de sa fonction dérivée.

† *Fonctions circulaires réciproques*

Exercice IV

Simplifier
$Arcsin(sin(19\pi/3))$, $sin(Arcsin(1/3))$, $tg(Arctg(\pi/4))$
$cos(Arctg(x))$ et $tg(Arccos(x))$.

Exercice V

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $tg(x) = \sqrt{3}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Arctg(2x) + Arctg(x) = \pi/4$

Exercice VI

Montrer que si a et b sont des réels tels que $ab < 1$ alors

$$Arctg(a) + Arctg(b) = Arctg(\frac{a+b}{1-ab})$$

Calculer

$$2arctg(1/13) + Arctg(1/7) + 2Arctg(1/4)$$

† *Pratique du calcul de dérivée*

Exercice VII

Calculer les domaines de définition, de continuité de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes
$f_1(x) = \sqrt{Arctg(x)}$, $f_2(x) = Arctg(ln(x))$, $f_3(x) = \frac{ln(x)}{x}$,
$f_4(x) = sin(x)Arcsin(x)$, $f_5(x) = ln(2Artg(3x))$, $f_6(x) = sin^2(Arccos(x^2))$

Exercice VIII

1)a) Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction

$$f(x) = Argsh(x) - ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

b) Que pouvez-vous en déduire?
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

† *Applications*

Exercice IX

Une dose $D = 250mg$ d'un médicament est administrée par voie intraveineuse. Ce médicament s'élimine avec un coefficient $k_e = 0,3mg.h^{-1}$, et la quantité présente à l'instant t dans le sang est de la forme $A(t) = De^{-k_e t}$. Sachant que le médicament n'est efficace que si une quantité d'au moins $40mg$ est présente dans le sang, au bout de combien de temps faut-il renouveler l'injection ?

Exercice X

Un haut-parleur d'une puissance de Q watts disposé à une distance de R mètre d'un observateur développe une puissance acoustique de $J = Q/(4\pi R^2)W.m^{-2}$. L'intensité d'un son en décibels est donnée par la formule :

$$I = 10log_{10}(\frac{J}{J_0})dB$$

$J_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ est la plus faible puissance audible par un être humain à une fréquence de $1kHz$.

a) La limite de la douleur pour un individu est estimée à 120 dB. Déterminer la distance à laquelle cette limite est atteinte lorsque $Q = 200W$. De même, déterminer la distance à laquelle le son perçu a l'intensité d'un chuchotement (20 dB).

b) Si l'individu est situé à 2 mètres de la source, déterminer la puissance Q nécéssaire pour atteindre la limite de la douleur.