UPJV 2021-2022

UFR Sciences

TD 2

Méthodes et techniques de calcul

† *Théorème de Rolle, accroissements finis variations*

Exercice I

1) Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.
On suppose que $\forall x \in \mathbf{R}, |f'(x)| \leq a$ où a est un réel donné.
Montrer que $\forall x, t \in \mathbf{R}; |f(x) - f(x+t)| \leq a|t|$

2) Donner (sans utiliser votre calculette) un majorant de l'erreur commise lorsqu'on écrit que $\frac{1}{\sqrt{99}} = 1/10$.

Exercice II

Pour chacune des fonctions suivantes
- Donner le domaine de définition
- Donner le domaine de dérivabilité et calculer l'expression des fonctions dérivées
- Donner les variations
- Donner une équation de la tangente - si elle existe - au point du graphe d'abcsisse a.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $a = -1$ et $a = 4$

2) $g(x) = \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}$, $a = 0$.

† *Fonctions polynômes et fractions rationnelles*

Exercice III

Soit la fonction polynômiale

$$f(x) = 3 + 2x^3 + x$$

quel est son degré? que valent les coefficients de degré 0, 1, 2, 3, ... ?
Quel est son domaine de définition? de continuité? de dérivabilité? donner l'expression de $f'(x)$ constater que f' est encore une fonction polynômiale quel est son degré?
Pouvez-vous proposer une formule donnant le degré de la fonction dérivée d'une fonction polynômiale de degré n?

Exercice IV

Calculer les domaines de définition, de continuité, de dérivabilité et donner l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 4$

2) $g(x) = \frac{x^3+3x-1}{x^2-5x+6}$

Exercice V

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ où a est un réel donné.

1) Quel sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f?
2) Calculer (si elle existe) l'expression de la fonction dérivée.
3) Donner les tableaux des variations de f dans les cas où
$a \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, $a = -\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}$ et $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

† *Fonctions logarithmes et exponentielles*

Exercice VI

1) Simplifier $ln(e^{\pi}), e^{ln(\pi)}, e^{(1/2)ln(3)+ln(5)}, (1/3)ln(e^{\pi+2})$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $2ln(x) + ln(6) = 0$ et $ln(x) + ln(x+1) = 1$
3) Résoudre les inégalités $ln(3x) > ln(x^2 - 1)$ et $e^{3x} \geq e^{x^2-x+2}$.

Exercice VII

Pour quels réels x a-t'on $x < x^2$? Pour quels réels a-t'on $\sqrt{x} < x$?
Pour un entier naturel n et un réel strictement positif x on a $x^n = e^{nln(x)}$
Pour tout réel a et tout réel positif x on pose

$$x^a = e^{aln(x)}$$

Soit $0 < a < b$ deux réels fixé. Montrer que
Si $x \in]0, 1[$ alors $x^b < x^a$ et que si $x \in]1, +\infty[$ alors $x^b > x^a$.

Exercice VIII

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations
$3^x + 3^{-x} = 2$, $3^{2x} - 2.3^x + 1 = 0$
$log_x(2) = -3$, $2^{ln(x)} = 8$

Exercice IX

Simplifier les expressions suivantes
$log_3(\sqrt[5]{27}), 2log_5(4) - (1/2)log_5(64) - log_5(2)$.

† *Fonctions hyperboliques*

Exercice X

Soit f une fonction réelle de la variable réelle.

1) Montrer que, en toutes circonstances, le domaine de définition des fonctions Pf et If définies par les formules

$$Pf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } If(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont symétriques par rapport à 0 , que Pf est une fonction paire et If une fonction impaire.
2) On suppose que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, Montrer que Pf et If sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et calculer leur fonctions dérivées. Que remarquez-vous?

3) Identifier les fonctions Pf et If dans le cas où f est la fonction exponentielle.

Exercice XI

En utilisant les formules $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Montrer que $2sh(x)ch(x) = sh(2x)$ et $ch^2(x) + sh^2(x) = ch(2x)$

Exercice XII

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = ch(x) - 3sh(x)$

1) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement une solution α.

2) Montrer que α satisfait $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 2 = 0$. Trouver α.

3) Trouver le point d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses.

Exercice XIII

Montrer que pour tout réel x on a $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Exprimer $5ch^2(x) + 3sh^2(x)$ à l''aide exclusivement de $ch(x)$.

Résoudre l'équation $5ch^2(x) + 3sh^2(x) = a$ où a est un réel donné