UPJV 2021-2022

UFR Sciences

TD 1

Méthodes et techniques de calcul

† *Domaines de définition*

Exercice I

a) Calculer les domaines de définition des fonctions suivantes

$f_1(x) = ln(x-4) \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad f_3(x) = \frac{x^2+x-4}{3x-4}$

b) Déterminer le domaine de définition ainsi que le signe des fonctions suivantes

$g_1(x) = x^2 + 3x - 4, \qquad g_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad g_3(x) = sin(x)$

c) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$h_1(x) = \sqrt{x^2+3x-4} \qquad h_2(x) = ln(x^2+3x-4), \qquad h_3(x) = \frac{1}{x^2+3x-4}$

$h_4(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad h_5(x) = ln(\frac{x+1}{x-1}), \qquad h_6(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}$

$h_7(x) = \sqrt{sin(x)}, \qquad h_8(x) = ln(sin(x)), \qquad h_9(x) = \frac{1}{sin(x)}$

Exercice II

Calculer les domaines de définitions des fonctions définies par les formules suivantes :

$f_1(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6}, \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2-3x+2}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2-x+1},$

$f_4(x) = ln(-x^2+1), \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x-1}}, \qquad f_6(x) = \sqrt{3x+2} - \frac{1}{3-x},$

$f_7(x) = \frac{ln(x+2)}{x^2+2x-3}, \qquad f_8(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}},$

Exercice III Calculer les domaines de définition des fonctions suivantes

$f_1(x) = \sqrt{\sqrt{16+x^2}-5}. \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{sin(2x+1)}, \qquad f_3(x) = ln(cos(x))$

$f_4(x) = \sqrt{x^3-2x^2-x+2}, \qquad f_5(x) = \sqrt{tg(x)}$

Pour ces trois exercices on écrira les domaines de définition comme des unions d'intervalles disjoints.

† *Continuité*

Exercice IV

Calculer les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes :

1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto f(x) = E(3x+2)$ où E est la fonction partie entière.

2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{x+1}$ si $x \neq -1$ et $g(-1) = 2$.

Exercice V

Quels sont les domaines de continuité des fonctions définies par les formules suivantes

1) $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

2) $g(x) = x.sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

† *Théorème des valeurs intermédiaires*

Exercice VI

Montrer que l'équation
$$3x + 1 + sin(x) = 0$$
admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Exercice VII

Montrer que toutes les équations de degré impair admettent au moins une solution réelle.

Exercice VIII

1) Soit f une fonction de $[0,1]$ vers $[0,1]$ continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

2) Donner le tableau des variations de la fonction $x \mapsto h(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$.
Combien de solution l'équation $h(x) = a$ où a est un réel donné admet-elle?
(on discutera selon les valeurs de a)

† *Dérivabilité, domaine de dérivabilité*

Exercice IX

Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité des fonctions suivantes, donner une expression de leur fonctions dérivées.
$f(x) = 2x^3 + 3x - 4$, $\quad g(x) = ln(x^2 + 1)$, $\quad h(x) = sin^2(3x + 1)$

Exercice X

Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, Calculer les expressions des fonctions dérivées :

$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$, $\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$, $\quad f_3(x) = |x^2 - 4x + 3|$,

$f_4(x) = ln(\frac{x-1}{x+2})$, $\quad f_5(x) = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $\quad f_6(x) = sin(\frac{1}{x})$

Exercice XI*

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par la formule
$$f(x) = x^2 sin(1/x) \text{ si } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$