Correction feuille 9

Exercice 1. • Soit l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \tag{E_1}$$

L'équation homogène associée

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{EH_1}$$

a pour équation caractériqtique

$$x^2 - 3y + 2 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = 1$ et ses racines sont 1 et 2. Les racines étant réelles, on en tire que les solutsion de (EH_1) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^x + \ell e^{2x},\ ,\ell \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ puisque le second membre de (E_1) est un polynôme du deuxième degré. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$ et on a

$$x^2 = y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2c - 3b + 2a)$$

d'où

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2c - 3b + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}$$

La fonction polynômiale $y_p(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ est solution particulière. On en défuit que les solutions de (E_1) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^x + \ell e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

• Soit l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = \cos x \tag{E_2}$$

Son équation homogène est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \tag{EH_2}$$

d'équation caractéristique

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Ici le dicrimionant vaut $\Delta = 4$ et les racines sont 1 et 3 : réelles. Ainsi les solutions de (EH_2) sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^x + \ell e^{3x},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, comme le second membre est un cosinus, donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ et alors

$$\cos(x) = y_p''(x) - 4y_p'(x) + 3y_p(x) = (2\lambda - 4\mu)\cos(x) + (4\lambda + 2\mu)\sin(t),$$

d'où

$$\begin{cases} 2\lambda - 4\mu = 1 \\ 4\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{10} \\ \mu = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Ainsi les solutions de (P_2) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^x + \ell e^{3x} + \frac{\cos(x)}{10} - \frac{\sin(x)}{5},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

- Soit l'équation différentielle
$$y'' + 4y' + 4y = e^x \tag{E_3}$$
Son équatino homogène est alors
$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{EH_3}$$
d'équation caractéristique
$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 0$, on a donc que -2 est racine double et donc les solutions de (EH_3) sont les
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{-2x} + \ell xe^{-2x},\ k, \ell\ in\mathbb{R}.$$
Ensuite, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda e^x$ et on trouve $\lambda = \frac{1}{9}$, d'où les solutions de (E_3) :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-2x} + \ell xe^{-2x} + \frac{e^x}{9},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$
- Soit l'équation différentielle
$$y'' + y' + y = \cos(3x) \tag{E_4}$$
d'équation homogène associée
$$y'' + y' + y = 0 \tag{EH_4}$$
Son équation caractéristique s'écrit
$$x^2 + x + 1 = 0,$$
de discriminant $\Delta = -3 < 0$. Les racines sont donc complexes et d'après le cours, les solutions de (EH_4) sont
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = k\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \ell\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$
Vu le second membre, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$ et on obtient
$$\cos(3x) = y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = (3\mu - 8\lambda)\cos(3x) - (3\lambda + 8\mu)\sin(3x)$$
d'où
$$\left\{\begin{array}{l} -8\lambda + 3\mu = 1 \\ 3\lambda + 8\mu = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -24\lambda + 9\mu = 3 \\ 24\lambda + 64\mu = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\frac{8}{73} \\ \mu = \frac{3}{73} \end{array}\right.$$
Ainsi, les solutions de (E_4) sont les
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = k\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \ell\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3\sin(3x) - 8\cos(3x)}{73},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$
- Soit l'équation différentielle
$$y'' - y' - 6y = xe^{-2x} \tag{E_5}$$
d'équation homogène associée
$$y'' - y' - 6y = 0 \tag{EH_5}$$
Son équation caractéristique est alors
$$x^2 - x - 6 = 0$$
de discriminant $\Delta = 25$ et de racines -2 et 3. Les solutions de (**??**) sont donc les
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{-2x} + \ell e^{3x},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on applique la variation de la constante et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = z(x)e^{2x}$ avec z une fonction deux fois dérivables. On a

$$xe^{-2x} = y_p''(x) - y_p'(x) - 6y_p(x) = (z''(x) - 5z'(x))e^{-2x}.$$

Il faut donc que $z'' - 5z' = x$; résolvons cette équation en posant $u := z'$; on a $u' - 5u = x$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les $u_h(x) = ae^{5x}$. Pour trouver une solution particulière, on utilise la variation de la constante et on écrit $u_p(x) = a(x)e^{5x}$, qui donne $a'(x) = xe^{-5x}$. On intègre ceci par parties :

$$\int_0^x te^{-5t}\mathrm{d}t = \left[\frac{te^{-5t}}{-5}\right]_0^x + \frac{1}{5}\int_0^x e^{-5t}\mathrm{d}t = \frac{e^{-5x}}{25} - \frac{xe^{-5x}}{5} = -\frac{e^{-5x}}{25}(1+5x).$$

Ainsi, u s'écrit $u(x) = ae^{5x} - \frac{1+5x}{25}$ et donc z s'écrit $z(x) = \frac{a}{5} - \frac{2x+5x^2}{50} + b$ avec a et b deux réels quelconques. Comme on cherche une solution particulière de (E_5), on peut choisir a et b arbitrairement, par exemple $a = b = 0$ et alors $z(x) = -x\frac{2+5x}{50}$, d'où $y_p(x) = -x\frac{2+5x}{50}e^{2x}$. Finalement, les solutions de (E_5) sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-2x} + \ell e^{3x} - \frac{x(5x+2)}{50}e^{-2x},\ \ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Remarquons qu'on aurait pu chercher de second membre sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^{-2x}$ et identifier a et b mais je voulais donner un exemple entier avec la variation de la constante, sans tenir compte de la forme du second membre.

- Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y = x\mathrm{ch}(x) \tag{E_6}$$

d'équation homogène associée

$$y'' - 2y = 0. \tag{EH_6}$$

Son équation caractéristique est alors

$$x^2 - 2 = 0$$

dont les racines sont $\pm\sqrt{2}$. Les solutions de (EH_6) sont donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{\sqrt{2}x} + \ell e^{-\sqrt{2}x},\ \ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Comme le second membre $x\mathrm{ch}(x) = \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (\lambda x + \mu)e^x + (\lambda' x + \mu')e^{-x}$ et on trouve

$$\frac{xe^x + xe^{-x}}{2} = y_p''(x) - 2y_p(x) = (-\lambda x + 2\lambda - \mu)e^x + (-\lambda' x - 2\lambda' - \mu')e^{-x},$$

d'où

$$\begin{cases} -\lambda = \frac{1}{2} \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda' = \frac{1}{2} \\ -2\lambda' - \mu' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = -1 \\ \lambda' = -\frac{1}{2} \\ \mu' = 1 \end{cases}$$

on a donc une solution particulière $y_p(x) = -\frac{1}{2}(x+2)e^x - \frac{1}{2}(x-2)e^{-x}$ et donc les solutions de (E_6) sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{\sqrt{2}x} + \ell e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}((x+2)e^x + (x-2)e^{-x}),\ \ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. • Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x^3 + 1 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \tag{P_1}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Son équation caractéristique est alors

$$x^2 + 2x + 1 = 0 = (x+1)^2$$

on a donc une racine double : -1 et les solutions de l'équation homogène sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{-x} + \ell x e^{-x},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Comme le second membre est un polynôme du troisième degré, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et on a

$$x^3 + 1 = y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b+c)x + (2b+2c+d)$$

d'où

$$\begin{cases} a = 1 \\ 6a + b = 0 \\ 6a + 4b + c = 0 \\ 2b + 2c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 18 \\ d = -23 \end{cases}$$

Ainsi, les solutions de léquation $y'' + 2y' + y = x^3 + 1$ sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-x} + \ell x e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 23,\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

De plus, on veut ici que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$, soit

$$1 = y(1) = ke^{-1} + \ell e^{-1} + 1 - 6 + 18 - 23 = (k+\ell)e^{-1} + 9$$

et

$$3 = y'(1) = -ke^{-1} + \ell e^{-1} - \ell e^{-1} + 3 - 12 + 18 = -ke^{-1} + 9,$$

d'où

$$\begin{cases} (k+\ell)e^{-1} - 10 = 1 \\ -ke^{-1} + 9 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + \ell = 11e \\ k = 7e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7e \\ \ell = 4e \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (P_1) est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = 7e^{1-x} + 4xe^{1-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 23.$$

- Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - y = (x-1)e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \tag{P_2}$$

L'équation homogène associée est alors

$$y'' + 3y' - y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

de discriminant $\Delta = 13$ et de racines $\alpha := \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $\beta := \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$. Les solutions de cette équation homogène sont alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{\alpha x} + \ell e^{\beta x},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Vu le second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (\lambda x + \mu)e^x$ et on trouve

$$(x-1)e^x = y_p''(x) + 3y_p'(x) - y_p(x) = (3\lambda x + 5\lambda + 3\mu)e^x$$

d'où

$$\begin{cases} 3\lambda = 1 \\ 5\lambda + 3\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $y'' + 3y' - y = (x-1)e^x$ s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{\alpha x} + \ell e^{\beta x} + \frac{3x-8}{9}e^x,\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on doit avoir $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$, soit

$$1 = y(0) = k + \ell - \frac{8}{9}$$

et

$$1 = y'(1) = k\alpha e^{\alpha} + \ell\beta e^{\beta} + \frac{3}{9}e - \frac{5}{9}e$$

d'où (je vous épargne les calculs)

$$\begin{cases} k = \frac{9+2e-17\beta e^{\beta}}{9(\alpha e^{\alpha} - \beta e^{\beta})} \\ \ell = \frac{17}{9} - k \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (P_2) est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{\alpha x} + \left(\frac{17}{9} - k\right)e^{\beta x} + \frac{3x-8}{9}e^x,$$

où

$$\alpha = \frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ \beta = \frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ k = \frac{9+2e-17\beta e^{\beta}}{9(\alpha e^{\alpha} - \beta e^{\beta})}.$$

Exercice 3. On considére l'équation

$$y'' + \gamma y' + cy = 0. \tag{E}$$

1) Supposons $c > 0$ et $\gamma > 0$. L'équation caractéristique de (E) est

$$x^2 + \gamma x + c = 0$$

de discriminant $\Delta = \gamma^2 - 4c$. Distinguons trois cas

- Si $\gamma^2 - 4c > 0$, alors la solution est donnée par

$$\forall t \geq 0,\ y(t) = ke^{\frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4c}}{2}t} + \ell e^{\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4c}}{2}t},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Comme $c < 0$, on a $\gamma > \sqrt{\gamma^2 - 4c}$, donc $\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4c}}{2}t} = 0 = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4c}}{2}t}$ d'où $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Comme ceci est vrai pour toute solution non nulle de (E), l'équilibre est stable.

- Si $\gamma^2 - 4c < 0$, les solutions de (E) s'écrivent

$$\forall t \geq 0,\ y(t) = k\cos\left(\frac{\sqrt{4c-\gamma^2}}{2}t\right)e^{\frac{\gamma}{2}t} + \ell\sin\left(\frac{\sqrt{4c-\gamma^2}}{2}t\right)e^{\frac{\gamma}{2}t},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas une solution non nulle n'a pas de limite en $+\infty$ et l'équilibre est donc instable.

- Si $\gamma^2 - 4c = 0$, alors les solutions de (E) sont données par

$$\forall t \geq 0,\ y(t) = ke^{-\frac{\gamma}{2}t} + \ell te^{-\frac{\gamma}{2}t},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on a bien $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ et l'équilibre est stable.

Pour résumer, dans le cas où $c, \gamma > 0$, l'équilibre est stable si et seulement si $\gamma^2 - 4c \geq 0$.

2) Supposons d'abord que $c < 0$. Alors $\Delta = \gamma^2 - 4c > 0$ et on a $\gamma \leq \sqrt{\gamma^2 - 4c}$, donc par la discussion ci-dessus, l'équilibre n'est stable que si $\ell = 0$. Il existe donc des solutions qui ne tendent pas vers 0 en $+\infty$, donc l'équilibre est instable.

Si $\gamma < 0$, alors on distingue trois cas, qui découlent des calculs faits dans la disjonction de cas précédente :

- Si $\Delta > 0$, alors $\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4c}}{2} > 0$ et l'équilibre est instable
- Si $\Delta < 0$, là aussi l'équilibre est instable car $\cos\left(\frac{\gamma}{2}t\right)$ et $\sin\left(\frac{\gamma}{2}t\right)$ n'ont pas de limite en $+\infty$.
- Si $\Delta = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}t} = +\infty$ et donc $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$ et l'équilibre est instable.

Pour résumer, si $c < 0$ ou si $\gamma < 0$, alors l'équilibre est instable.

Exercice 4. Soit l'équation différentielle

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \tag{E}$$

1.a) L'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \tag{EH}$$

b) Cherchons d'abord une solution sous la forme $y_h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a

$$x^2y_h''(x) - 3xy_h'(x) + 4y_h(x) = ax^3 + cx + 4d$$

donc on a $x^2y_h'' - 3xy_h' + 4y_h = 0$ si et seulement si $a = c = d = 0$. Ainsi on a $y_h(x) = bx^2$ et ceci nous donne une indication sur la manière de procéder quand y_h est une solution polynômiale quelconque. Si $y_h = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ est une solution polynômiale avec $n \geq 3$, alors en identifiant les termes de plus haut degré dans l'expression $x^2y_h''(x) - 3xy_h'(x) + 4y_h(x) = 0$, on trouve $(n^2 - 4n + 4)a_nx^n = n(n-1)a_nx^n - 3na_nx^n + 4a_nx^n = 0$ donc $(n-2)^2a_n = (n^2 - 4n + 4)a_n = 0$. Comme, pour $n > 2$, on a $(n-2)^2 \neq 0$, on doit avoir $a_n = 0$. Donc, tous les termes de degré différent de 2 doivent être nuls et alors $y_h(x) = a_2x^2$. Finalement, on a trouvé que les seules solutions polynômiales de (EH) sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $f : x \mapsto x^2$ une solution polynômiale de (EH) et prenons g une autre solution, quelconque. On considère leur wronskien $W := fg' - f'g$. D'après la cours, ce wronskien s'écrit (attention au cas $x = 0$!)

$$forall x \neq 0,\ W(x) = \begin{cases} K_1e^{3\ln|x|} = K_1(-x)^3 & \text{si} \quad x < 0 \\ K_2e^{3\ln|x|} = K_2x^3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

où K_1 et K_2 sont deux réels arbitraire. Ici, comme on veut les solutions sur $\mathbb{R}$, le wronskien W doit être défini, continu et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le seul moyen pour que cela arrive est que $K_1 = K_2 =: K$. Ainsi, on a $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = W(x) = K|x|^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g doit donc vérifier l'équation différentielle du premier ordre

$$x^2g' - 2xg = K|x|^3.$$

Résolvons cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions de l'équation homogène sont les $g_h(x) = ae^{2\ln(-x)} = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}$ et en employant la variation de la constante, on obtient $xg_p'(x) - 2g_p(x) = a'(x)x^3 = -Kx^2$, donc $a(x) = -K\ln(-x)$ et donc $g(x) = (a - K\ln(-x))x^2$ avec $a \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve $g(x) = (b + K\ln(x))x^2$ avec $b \in \mathbb{R}$. Ensuite, on voit que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} = g(x)$$

on pose donc $g(0) = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Ainsi, la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} (a - K\ln(-x))x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ (b + K\ln(x))x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(où $a, b \in \mathbb{R}$) est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation $x^2 g' - 2xg = K|x|^3$. De plus, on a $K = W(1) = f(1)g'(1) - f'(1)g(1) = g'(1) - 2g(1)$ et $g(1) = b$, $g(-1) = a$.
Finalement, on a trouvé toutes les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} x^2(a - K\ln(-x))) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2(b + K\ln(x)) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et K un réel dépendant de a et b.

3. Il reste à trouver une solution particulière de (E). On remarque que $y_p(x) = x^3$ est une telle solution car $x^2 y_p''(x) - 3xy_p'(x) + 4y_p(x) = 6x^3 - 9x^3 + 4x^3 = x^3$ et donc, les solutions de (E) sont au final les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} x^2(x + a - K\ln(-x))) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2(x + b + K\ln(x)) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et K un réel dépendant de a et b.

Exercice 5. Soit l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \tag{E}$$

1. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et posons $z(x) := y(e^x)$ (ce que l'on aurait dû faire dans l'exercice précédent, vu la pénibilité des calculs et le fait que c'est la même équation homogène !) Alors, la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable comme composée de fonctions deux fois dérivables et on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = e^x y'(e^x),$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x).$$

2. Comme y est solution de l'équation, on a, en posant $u = e^x$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = u^2 y''(u) - 3uy'(u) + 4y(u) = (e^x)^2 y''(e^x) - 3e^x y'(e^x) + 4y(e^x) = 0$$

d'où, avec les expressions des dérivées première et seconde de z trouvées ci-dessus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - e^x y'(e^x) - 3z'(x) + 4z(x) = 0$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - 4z'(x) + 4z(x) = 0.$$

Ainsi, z vérifie l'équation différentielle suivante

$$z'' - 4z' + 4 = 0 \tag{E'}$$

3. Résolvons l'équation (E'). L'équation caractéristique de cette équation homogène est $x^2 - 2x + 4 = (x - 2)^2$, donc les solutions de (E') s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = ke^{2x} + \ell x e^{2x},\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

Pour retrouver y, on se rappelle qu'on a défini $z = y \circ \exp$, donc que $y = z \circ \ln$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = kx^2 + \ell x^2 \ln(x) = x^2(k + \ell \ln(x)),\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

On remarque que ceci est cohérent avec les solutions trouvées dans l'exercice précédent.
Les équations du type

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

sont appelées "équations différentielles d'Euler".