Correction feuille 8/9

† *Équations différentielles linéaires du premier ordre*

Exercice 1. Rappelons que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

s'écrivent

$$y : x \mapsto ke^{G(x)},\ k \in \mathbb{R}$$

avec G une primitive de $-\frac{b(t)}{a(t)}$. Dans la suite, pour désigner que F est une primitive de f, on écrira $F(x) = \int f(t)\mathrm{d}t$. Attention, ce n'est qu'une notation et en aucun cas une égalité mathématique !
Dans ce qui suit, la méthode est toujours la même : on commence par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec la méthode de "variation de la constante" :
Mettons que l'on veut résoudre $a(x)y' + b(x)y = s(x)$, on sait que les solutions de l'équation homogène sont $y : x \to ke^{G(x)}$, pour trouver une solution particulière y_p, on cherche sous la forme $y_p = k(x)e^{G(x)}$ (on fait "varier la constante"), on a alors

$$a(x)y_p' + b(x)y_p = a(x)(k'(x)e^{G(x)} + G'(x)k(x)e^{G(x)}) + b(x)k(x)e^{G(x)} = a(x)k'(x)e^{G(x)}$$

On cherche alors $k(x)$ une primitive de $\frac{s(x)}{a(x)e^{G(x)}}$ (si tant est que ça existe).
Bien-sûr, la variation de la constante n'est pas une étape obligatoire : si vous êtes extra-lucides et que vous devinez une solution particulière, vous avez tout à fait le droit de vous en servir (à condition de montrer que c'est bien une solution !).
Plus raisonnablement, vous pouvez aussi chercher une solution particulière sous une certaine forme (par exemple, si le second membre est un polynôme, vous pouvez chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

- L'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$2y' + 3y = x^2 + x + 1$$

s'écrit

$$2y' + 3y = 0.$$

Ses solutions s'écrivent $y_h(x) = ke^{-\frac{3}{2}t}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation, on pourrait utiliser la méthode de variation de la constante, mais ici comme c'est un polynôme, on peut la chercher sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et comme y_p doit vérifier l'équation, on doit avoir

$$x^2 + x + 1 = 2y_p' + 3y_p = 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c$$

d'où

$$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{9},\ c = \frac{11}{27}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-\frac{3}{2}t} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{9} + \frac{11}{27},\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation
$$y' + 2y = (x^3+1)e^{x^2}$$
admet pour équation homogène
$$y' + 2y = 0$$
dont les solutions sont les $y_h(x) = ke^{-2x}$. Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on suppose que y_p s'écrit $y_p(x) = k(x)e^{-2x}$ avec k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule
$$(x^3+1)e^{x^2} = y_p' + 2y_p = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x} + 2k(x)e^{-2x} = k'(x)e^{-2x},$$
d'où $k'(x) = (x^3+1)e^{x^2+2x} = (x^3+1)e^{x(x+2)}$ et donc $k(x) = \int_0^x (t^3+1)e^{t(t+2)}\mathrm{d}t$. On en déduit que les solutions de l'équation s'écrivent
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-2t}\left(k + \int_0^x (t^3+1)e^{t(t+2)}\mathrm{d}t\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation homogène associée à
$$y' + y = \sin(x) - \cos(x)$$
est
$$y' + y = 0$$
dont les solutions sont
$$y_h(x) = k^e - x,\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante : $y_p(x) = k(x)e^{-x}$ et on a
$$\sin(x) - \cos(x) = y_p' + y_p = k'(x)e^{-x},$$
d'où $k'(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^x$. En faisant une intégration par parties, on a
$$k(x) = \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t = [(\sin(t) - \cos(t))e^t]_0^x - \int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t$$
$$= (\sin(x) - \cos(x))e^x + 1 - \int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t.$$
Puis, en effectuant de nouveau une intégration par parties, il vient
$$\int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t = [(\cos(t) + \sin(t))e^t]_0^x - \int_0^x (\cos(t) - \sin(t))e^t\mathrm{d}t$$
$$= (\cos(x) + \sin(x))e^x - 1 + \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t$$
d'où
$$\int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t = 2 - 2\cos(x)e^x - \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t = 1 - \cos(x)e^x.$$
Ainsi, une primitive de $x \mapsto (\sin(x) - \cos(x))e^x$ est donnée par $x \mapsto -\cos(x)e^x$. On en déduit les solutions de l'équation
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + k(x)e^{-x} = ke^{-x} - \cos(x)e^{-x}e^x = ke^{-x} - \cos(x),\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. • L'équation homogène associée à l'équation
$$y' + xy = x$$
est
$$y' + xy = 0$$
Ses solutions s'écrivent
$$y_h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}},\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour le solution particulière, on peut utilise la variation de la constante, ou bien remarquer tout simplement que la fonction constante égale à 1 est une solution particulière. Les solutions de l'équation sont donc les
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

• Ici, l'équation homogène associée à
$$y' + 3x^2 y = 6x^2$$
est donnée par
$$y' + 3x^2 y = 0$$
et ses solutions s'écrivent
$$y_h(x) = ke^{-x^3},\ k \in \mathbb{R}.$$
On remarque ensuite que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation et on obtient alors toutes les solutions :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-x^3} + 2,\ k \in \mathbb{R}.$$

• L'équation différentielle
$$y' + e^{-x} y = xe^{e^{-x}}$$
admet pour équation homogène
$$y' + e^{-x} y = 0$$
et ses solutions s'écrivent
$$y_h(x) = ke^{e^{-x}},\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière, on fait varier la constante : $y_p(x) = k(x)e^{e^{-x}}$ et on écrit
$$xe^{e^{-1}} = y_p(x)' + e^{-x} y_p(x) = k'(x)e^{e^{-x}},$$
d'où $k'(x) = x$ et donc $k(x) = \frac{x^2}{2}$. Ainsi, les solutions de l'équation sont
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(k + \frac{x^2}{2}\right) e^{e^{-x}},\ k \in \mathbb{R}.$$

• L'équation homogène associée à l'équation différentielle
$$(1 + x^2)y' - y = e^{\arctan(x)}$$
est
$$(1 + x^2)y' - y = 0$$
et ses solutions sont
$$y_h(x) = ke^{\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}} = ke^{\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on écrit, avec $y_p(x) = k(x)e^{\arctan(x)}$,
$$e^{\arctan(x)} = (1 + x^2)y_p'(x) - y_p(x)$$
$$= (1 + x^2)k'(x)e^{\arctan(x)} + k(x)e^{\arctan(x)} - k(x)e^{\arctan(x)} = (1 + x^2)k'(x)e^{\arctan(x)},$$
d'où $k'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k(x) = \arctan(x)$. Ainsi, les solutions de l'équation s'écrivent
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (k + \arctan(x))e^{\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

† *Recollement*

Exercice 3.
1. La fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

2. Soit l'équation différentielle

$$(x+1)y' - (x+2)y = x(x+1)e^x \tag{E}$$

Pour la résoudre sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on doit calculer une primitive de $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$, donc I ne soit pas contenir -1. Les plus grands tels intervalles sont $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$. Ce sont donc les deux intervalles sur lesquels les méthodes de résolution s'appliquent.

3. Résolvons d'abord (E) sur $]-1, +\infty[$. Sur cet intervalle, l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = xe^x.$$

L'équation homogène associée est alors

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = 0.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$\forall x > -1,\ y_h(x) = ke^{\int \frac{t+2}{t+1}\mathrm{d}t} = ke^{\int 1+\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t} = ke^{x+\ln|x+1|} = ke^{x+\ln(x+1)} = k(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}$$

Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante ; on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = k(x)(x+1)e^x$ et on écrit

$$xe^x = y_p'(x) - \frac{x+2}{x+1}y_p(x) = k'(x)(x+1)e^x$$

d'où $k'(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ et donc $k(x) = x - \ln|x+1| = x - \ln(x+1)$. Les solutions de (E) sur $]-1, +\infty[$ s'écrivent donc

$$\forall x > -1,\ y(x) = (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite (E) sur $]-\infty, -1[$. L'équation homogène

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = 0$$

admet pour solutions

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = ke^{x+\ln|x+1|} = ke^{x+\ln(-x-1)} = -k(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}$$

ou encore, en posant $\widetilde{k} := -k$:

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = \widetilde{k}(x+1)e^x.$$

Pour la solution homogène, on utilise la variation de la constante : $y_p(x) = \widetilde{k}(x)(x+1)e^x$ et on écrit

$$xe^x = y_p'(x) - \frac{x+2}{x+1}y_p(x) = \widetilde{k}'(x)(x+1)e^x$$

d'où $\widetilde{k}'(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ et donc $\widetilde{k}(x) = x - \ln|x+1| = x - \ln(-x-1)$. Ainsi, les solutions de (E) sur $]-\infty, -1[$ s'écrivent

$$\forall x < -1,\ y(x) = (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x,\ \widetilde{k} \in \mathbb{R}.$$

4. Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors par ce qui précède, il doit exister $k, \widetilde{k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ y(x) = \begin{cases} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x & \text{si} \quad x < -1 \\ (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

La fonction y doit être définie et continue en -1. On calcule

$$\lim_{x\to -1^-} y(x) = \lim_{x\to -1^-} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x = 0$$

ainsi que

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \lim_{x\to -1^+} (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x = 0$$

ces deux limites étant calculées par croissances comparées (i.e. en utilisant $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$). Ainsi, pour que y soit continue en -1, il faut poser $y(-1) = 0$. Il faut ensuite que y soit dérivable en -1. On calcule

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))e^x = +\infty.$$

Ceci montre que y ne peut être dérivable en -1, donc qu'il n'existe pas de solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$: l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E) est donc l'ensemble vide.

† *Conditions initiales*

Exercice 4.

- On considère le problème de Cauchy (i.e. l'équation différentielle avec conditions initiales) suivant :

$$\begin{cases} (x^2+1)y' - 2y = xe^{2\arctan(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{P}$$

L'équation ne pose de problème nulle-part et on peut la résoudre sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est

$$y' - \frac{2}{x^2+1}y = 0$$

et ses solutions s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{2\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, la méthode de la variation de la constante donne, en écrivant $y_p(x) = k(x)e^{2\arctan(x)}$:

$$xe^{2\arctan(x)} = (x^2+1)y_p'(x) - 2y_p(x) = (x^2+1)k'(x)e^{2\arctan(x)}$$

d'où $k'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et donc $k(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation de (P) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} + k\right)e^{2\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, si on veut $y(0) = 1$, alors

$$1 = y(0) = \left(\frac{\ln(0^2+1)}{2} + k\right)e^{2\arctan(0)} = k.$$

Donc l'unique solution au problème (P) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} + 1\right)e^{2\arctan(x)}.$$

- Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{P}$$

L'équation pose problème en $x = -1$, on va donc la résoudre sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, +\infty[$ et voir si l'on peut recoller les solutions. L'équation homogène associée est

$$(x+1)y' + y = 0.$$

* Sur $]-\infty,-1[$, les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = ke^{-\ln(-x-1)} = \frac{-k}{x+1},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, pour la solution particulière, on applique la variation de la constante et on obtient

$$x^2 = (x+1)\frac{k'(x)}{x+1}$$

d'où $k'(x) = x^2$ et donc $k(x) = \frac{x^3}{3}$. Ainsi les solutions de l'équation sur $]-\infty,-1[$ s'écrivent

$$\forall x < -1,\ y_1(x) = \frac{k_1 - x^3}{3(x+1)},\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

* Sur $]-1,+\infty[$, on procède de même (en faisant attention aux signes dans les logarithmes !) et on trouve que les solutions de l'équation sur $]-1,+\infty[$ s'écrivent

$$\forall x > -1,\ y_2(x) = \frac{k_2 - x^3}{3(x+1)},\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{x\to -1^-} y(x) = \lim_{x\to -1^-} y_1(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad k_1 < -1 \\ -1 & \text{si} \quad k_1 = -1 \\ -\infty & \text{si} \quad k_1 > -1 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \lim_{x\to -1^+} y_2(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad k_2 < -1 \\ -1 & \text{si} \quad k_2 = -1 \\ +\infty & \text{si} \quad k_2 > -1 \end{cases}$$

Comme on veut une solution maximale (i.e. définie sur le plus grand intervalle possible contenant 0), y doit admettre une limite en -1 : on doit avoir $k_1 = k_2 = -1$ et alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} -\frac{1+x^3}{3(x+1)} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ -1 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to -1} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-x^3 + 3x + 2}{3(1+x)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{2-x}{3} = 1$$

d'où $y'(-1) = 1$ et la fonction y est alors solution de l'équation. Cependant, on a $y(0) = -\frac{1}{3} \neq 0$, donc y ne répond pas au problème posé. On doit donc considérer uniquement la solution y_2 sur $]-1,+\infty[$ (car cet intervalle contient 0), qui est maximale puisqu'on a

$$\lim_{x\to -1^+} |y_2(x)| = +\infty$$

car $k_2 \neq -1$. Enfin, pour qu'on ait $y(0) = 0$, on doit avoir $k_2 = 0$ et donc, la solution maximale au problème posé est définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x > -1,\ y(x) = -\frac{x^3}{3(x+1)}.$$

- Soit enfin le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - x\ln(x)y = 1 - x^2\ln(x) \\ y(2) = e^{2\ln 2} = 4 \end{cases} \tag{P}$$

On résout l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation homogène associée est

$$y' - x\ln(x)y = 0$$

et ses solutions s'écrivent
$$\forall x > 0,\ y_h(x) = ke^{\int t\ln(t)\mathrm{d}t},\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour calculer $\int_1^x t\ln(t)\mathrm{d}t$, on utilise une intégration par parties (avec $u(t) := \frac{t^2}{2}$ et $v(t) := \ln(t)$) :
$$\int_1^x t\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + \frac{1}{4}$$
d'où
$$\forall x > 0,\ y_h(x) = ke^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)},\ k \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière, on peut utiliser la variation de la constante, ou bien remarquer que la fonction $y_p(x) = x$ est aussi solution particulière. Ainsi, les solutions de l'équation de (P) sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent
$$\forall x > 0,\ y(x) = ke^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x,\ k \in \mathbb{R}.$$
Maintenant, si on veut $y(2) = 4$, on doit avoir
$$4 = y(2) = ke^{\frac{4}{4}(2\ln(2)-1)} + 2 = k\left(\frac{4}{e}\right) + 2$$
d'où $k = \frac{2e}{4} = \frac{e}{2}$ et donc la solution de (P) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0,\ y(x) = \frac{e}{2}e^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x = \frac{1}{2}e^{1+\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x.$$

Exercice 5.

1. Notons $Q(t)$ la quantité de substance radioactive à l'instant t. La décroissance de la quantité de substance à l'instant t est représentée par $Q'(t)$ et est proportionnelle à $Q(t)$: disons $Q'(t) = \alpha Q(t)$ et α est négatif car la quantité de substance est supposée décroître. Ainsi, l'équation différentielle recherchée est la suivante
$$Q' + \alpha Q = 0,\ \alpha > 0.$$

2. On résout l'équation
$$Q' + kQ = 0.$$
Ses solutions sont données par
$$\forall t \geq 0,\ Q(t) = Q(0)e^{-kt}.$$
Comme $k > 0$, on a
$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} Q(0)e^{-kt} = 0,$$
donc la définition de limite et le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence de $t_0 > 0$ tel que $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$. Ce t_0 est appelé la *demi-vie* de la substance. Pour trouver t_0, on résout l'équation $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$:
$$Q(0)e^{-kt_0} = Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2} \ \Rightarrow\ e^{-kt_0} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ kt_0 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \ \Rightarrow\ t_0 = \frac{\ln 2}{k}$$
et on a bien $Q\left(\frac{\ln 2}{t_0}\right) = Q(0)e^{-k\frac{\ln 2}{k}} = Q(0)e^{-\ln 2} = \frac{Q(0)}{2}$. Ainsi, la demi-vie t_0 est donnée par
$$t_0 = \frac{\ln 2}{k}.$$

3. Si la substance a une demi-vie de 10 jours, alors par ce qui précède, le coefficient k vaut
$$k = \frac{\ln 2}{10}.$$

Dire qu'il y a 28 mg de cette substance à l'instant initial signifie que $Q(0) = 28$. On doit alors résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q' + \frac{\ln 2}{10} Q = 0 \\ Q(0) = 28 \end{cases}$$

Comme on l'a vu ci-dessus, la solution est donnée par

$$\forall t \geq 0, \ Q(t) = 28e^{-\frac{\ln 2}{10}t}.$$

Si l'on cherche combien il reste de substance au bout de 8 jours, on calcule alors simplement

$$Q(8) = 28e^{-\frac{\ln 2}{10}\times 8} = 28e^{-\frac{4\ln 2}{5}} = 28e^{-\frac{\ln 16}{5}} = \frac{28}{\sqrt[5]{16}}$$

Au bout de 8 jours, il reste donc $\frac{28}{\sqrt[5]{16}} \approx 16.1$ mg de substance.

Exercice 6.

1. Techniquement, on doit résoudre l'équation $x''(t) = g$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, mais elle est très facile à résoudre : les solutions se devinent toutes seules, ce sont les fonctions de la forme $x(t) = g\frac{t^2}{2} + at + b$, où a et b sont des constantes réelles. On sait que $x(0) = 0$ par hypothèse, donc $0 = x(0) = g\frac{0^2}{2} + a0 + b = b$, donc $b = 0$, ensuite, on a $x'(t) = gt + a$, donc $x'(0) = a$, la vitesse initiale est donc la constante a, d'où

$$x(t) = g\frac{t^2}{2} + x'(0)t$$

La distance parcourue par l'objet dépend du carré du temps, (et linéairement de la vitesse initiale, mais comme $t^2 >> t$ en $+\infty$, au final la vitesse initiale ne joue pas un très grand rôle sur le temps long, seulement au début de l'expérience).

2. Là encore, on aurait une équation différentielle d'ordre 2

$$x''(t) + \frac{k}{m}x'(t) = g$$

mais on peut se ramener à une équation d'ordre 1, en effet comme il n'y a pas de $x(t)$ dans l'équation, on peut poser $y = x'$ pour obtenir

$$y' + \frac{k}{m}y = g$$

qui est une équation différentielle d'ordre 1, son équation homogène associée est

$$y' + \frac{k}{m}y = 0$$

dont les solutions sont de la forme $\lambda e^{-\frac{k}{m}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ensuite comme g est une constante, la fonction constante $y_p = \frac{mg}{k}$ est une solution particulière de l'équation, ses solutions générales sont donc de la forme

$$y = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

On a donc $x'(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$.
À présent que l'on connait $x'(t)$, on veut en calculer les primitives, on a alors

$$x(t) = -\frac{m}{k}\lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t + c$$

où c est une constante réelle. Il reste a utiliser les données initiales ($x(0)$ et $x'(0)$) pour calculer les valeurs de λ et c, on a

$$x(0) = -\frac{m}{k}\lambda + c = 0 \ \text{ et } \ x'(0) = \lambda + \frac{mg}{k}$$

Donc $c = \frac{m}{k}\lambda = \frac{m}{k}\left(x'(0) - \frac{mg}{k}\right)$, et on obtient

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(-\lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}c + gt\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(-\lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \lambda + gt\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(\left(x'(0) - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + gt\right)$$

Contrairement au cas où on néglige la résistance de l'air, on constate que la vitesse $x'(t)$ tend vers une constante, autrement dit on finit par atteindre une vitesse terminale.

Équations d'ordre 2

Exercice 7.

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' - 3y" + 2y = 0 \;\text{ et }\; (EC) : X^2 - 3X + 2 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Comme on a deux solutions distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = ax^2 + bx + c$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= 2ax + b \\ y_p'' &= 2a \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$\begin{aligned} x^2 = y_p'' - 3y_p' + 2y_p =& 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) \\ =& 2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ =& x^2(2a) + x(-6a + 2b) + 2a - 3b + 2c \end{aligned}$$

On résout donc le système suivant

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3a = \frac{3}{2} \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3a = \frac{3}{2} \\ 2c = -2a + 3b = -1 + \frac{9}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{1}{4}\left(2x^2 + 6x + 7\right)$$

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' - 4y' + 3y = 0 \text{ et } (EC) : X^2 - 4X + 3 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \quad x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Comme on a deux solutions distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = \lambda e^x + \mu e^{3x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = a\cos(x) + b\sin(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= -a\sin(x) + b\cos(x) \\ y_p'' &= -a\cos(x) - b\sin(x) \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$cos(x) = y_p' - 4y_p' + 3y_p = (-a - 4b + 3a)\cos(x) + (-b + 4a + 3b)\sin(x) = (2a - 4b)\cos(x) + (4a + 2b)\sin(x)$$

On résout donc le système suivant

$$\begin{cases} 2a - 4b = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 8a = 1 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^x + \mu e^{3x} + \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$$

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' + 4y' + 4y = e^x \text{ et } (EC) : X^2 + 4X + 4 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 16 - 16 = 0, \quad x_0 = \frac{-4}{2} = -2$$

Comme on a une seule solution de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = (\lambda + \mu x)e^{-2x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici e^x, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = ae^x$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= ae^x \\ y_p'' &= ae^x \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$e^x = y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 9ae^x$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{9}e^x$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = (\lambda + \mu x)e^{-2x} + \frac{1}{9}e^x$$

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' + y' + y = 0 \ \text{ et } \ (EC) : X^2 + X + 1$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Comme $\Delta < 0$, on calcule $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = e^{\frac{-1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici $\cos(3x)$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = a\cos(3x) + b\sin(3x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= 3b\cos(3x) - 3a\sin(3x) \\ y_p'' &= -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$\cos(3x) = y_p'' + y_p' + y_p = (-9a + 3b + a)\cos(3x) + (-9b - 3a + b)\sin(3x) = (3b - 8a)\cos(3x) + (-3a - 8b)\sin(x)$$

On résout donc le système linéaire

$$\begin{cases} 3b - 8a = 1 \\ -3a - 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-9}{8}a - 8a = 1 \\ b = \frac{-3}{8}a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-8}{73} \\ b = \frac{3}{73} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{73}(-8\cos(3x) + 3\sin(3x))$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = e^{\frac{-1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{73}(-8\cos(3x) + 3\sin(3x))$$

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' - y' - 6y = 0 \ \text{ et } \ (EC) : X^2 - X - 6 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 1 + 24 = 25, \quad x_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Comme on a deux solutions distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici xe^{-2x}, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= (2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^{-2x} = (-2ax^2 + 2(a-b)x - 2c + b)e^{-2x} \\ y_p'' &= (-4ax + 2(a-b) + 4ax^2 - 4(a-b)x + 4c - 2b)e^{-2x} = (4ax^2 - 8ax + 4bx + 2a - 4b + 4c)e^{-2x} \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$xe^{-2x} = y_p'' - y_p' - 6y_p = (-10ax + 2a - 5b)e^{-2x}$$

On résout donc le système suivant

$$\begin{cases} -10a = 1 \\ -5b + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{10} \\ b = \frac{2}{5}a = \frac{-1}{25} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \left(\frac{-1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x\right)e^{-2x}$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x} + \left(\frac{-1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x\right)e^{-2x}$$

- Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' - 2y = 0 \text{ et } (EC) : X^2 - 2 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 0 + 8 = 8, \quad x_1 = \frac{0 - \sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{0 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

Comme on a deux solutions distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = \lambda e^{-\sqrt{2}x} + \mu e^{\sqrt{2}x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est ici $x\mathrm{ch}(x) = \frac{xe^{-x}+xe^{x}}{2}$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = (ax+b)e^x + (ax+b)e^{-x}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= (a + ax + b)e^x + (a - ax - b)e^{-x} \\ y_p'' &= (ax + 2a + b)e^x + (ax + b - 2a)e^{-x} \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$x\mathrm{ch}(x) = \frac{x}{2}e^x + \frac{x}{2}e^{-x} = y_p'' - 2y_p = (ax + 2a + b - 2ax - 2b)e^x + (ax + b - 2a - 2ax - 2b)e^x$$

On cherche donc à résoudre $-ax + 2a - b = \frac{x}{2}$, on obtient le système

$$\begin{cases} -a = \frac{1}{2} \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \left(\frac{-1}{2}x - 1\right)(e^x + e^{-x}) = -(x+2)\mathrm{ch}(x)$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^{-\sqrt{2}x} + \mu e^{\sqrt{2}x} - (x+2)\mathrm{ch}(x)$$

Exercice 8.
1. On commence par résoudre en toute généralité l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x^3 + 1$: Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' + 2y' + y = 0 \text{ et } (EC) : X^2 + 2X + 1 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 0, \quad x_0 = \frac{-2}{2} = -1$$

Comme on a une unique solution de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = (\lambda + \mu x)e^{-x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), comme le second membre est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^3 + ax^2 + bx + c$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= 3x^2 + 2ax + b \\ y_p'' &= 6x + 2a \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$x^3 + 1 = 6x + 2a + 2(3x^2 + 2ax + b) + x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + (6 + a)x^2 + (6 + 4a + b)x + 2a + 2b + c$$

On cherche donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 6 + a = 0 \\ 6 + 4a + b = 0 \\ 2a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 18 \\ c = 1 - 2a - 2b = -23 \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = x^3 - 6x^2 + 18x - 23$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = (\lambda + \mu x)e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 23$$

À présent, on cherche à trouver la solution de (E) qui respecte $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$, on a

$$y' = (\mu - \lambda - \mu x)e^{-x} + 3x^2 - 12x + 18$$

donc

$$\begin{aligned} y(1) &= (\lambda + \mu)e^{-1} + 1 - 6 + 18 - 23 = (\lambda + \mu)e^{-1} - 10 \\ y'(1) &= (\mu - \lambda - \mu)e^{-1} + 3 - 12 + 18 = \lambda e^{-1} + 9 \end{aligned}$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)e^{-1} - 10 = 1 \\ \lambda e^{-1} + 9 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 18e \\ \lambda = -7e \end{cases}$$

On obtient donc une unique solution au problème posé, donnée par

$$(-7 + 18x)e^{1-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 23$$

2. On commence par résoudre en toute généralité l'équation différentielle $y'' + 3y' - y = (x - 1)e^x$: Les équations homogènes et caractéristiques sont données par

$$(EH) : y'' + 3y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (EC) : X^2 + 3X - 1 = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$\Delta = 9 + 4 = 13, \quad x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Comme on a deux solutions distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de (EH) sont les suivantes :

$$y_h = \lambda e^{x_1 x} + \mu e^{x_2 x}$$

Où λ et μ sont des constantes réelles.
On doit ensuite trouver une solution particulière de (E), compte tenu de la forme du second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = (ax+b)e^x$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p' &= (ax+b+a)e^x \\ y_p'' &= (ax+b+2a)e^x \end{aligned}$$

Donc, si y_p est une solution, on a

$$(x-1)e^x = (3ax+3b+5a)e^x$$

On cherche donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b+5a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 3b+5a = \frac{1}{3}(-1-5a) = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

On obtient donc la solution particulière $y_p = \frac{1}{9}(3x-8)e^x$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution de (EH). Les solutions de (E) sont donc données par

$$y = \lambda e^{x_1 x} + \mu e^{x_2 x} + \frac{1}{9}(3x-8)e^x$$

À présent, on cherche à trouver la solution de (E) qui respecte $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$, on trouve (je vous épargne les calculs)

$$\begin{cases} \mu = \frac{9+2e-17\beta e^\beta}{9(\alpha e^\alpha - \beta e^\beta)} \\ \lambda = \frac{17}{9} - \mu \end{cases}$$

Ainsi, la solution du problème considéré est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \mu e^{x_2 x} + \left(\frac{17}{9} - \mu\right) e^{x_1 x} + \frac{3x-8}{9} e^x,$$

avec $\mu = \frac{9+2e-17\beta e^\beta}{9(\alpha e^\alpha - \beta e^\beta)}$