Correction feuille 7

† *Calcul d'intégrales*

Exercice 1. On peut calculer directement les primitives à l'aide des primitives usuelles (à connaître par cœur !) vues en cours.

- On a
$$\int_0^1 (3t^2+2t-1)\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_0^1 = 1.$$
- On a
$$\int_0^{\pi} \sin(2t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(2t)}{t}\right]_0^{\pi} = 0.$$
- On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto t^2+t+4$, donc on peut écrire
$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+4}\mathrm{d}t = \left[\ln(|t^2+t+4|)\right]_1^2 = \ln(10)-\ln(6) = \ln\frac{5}{3}.$$
- On utilise la linéarité de l'intégrale pour écrire
$$\begin{aligned}\int_0^2 (t^2+e^t-\sin t)\mathrm{d}t &= \int_0^2 t^2\mathrm{d}t + \int_0^2 e^t\mathrm{d}t - \int_0^2 \sin(t)\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + [e^t]_0^2 + [\cos(t)]_0^2\\ &= \frac{8}{3} + e^2 - 1 + \cos(2) - \cos(0)\\ &= \frac{8}{3} + e^2 + \cos(2) - 2.\end{aligned}$$
- On calcule
$$\int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2.$$
- Enfin, on écrit
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(|t|)]_{-2}^{-1} = -\ln 2.$$

Exercice 2. Dans chaque cas, on donne u et v **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** $[a,b]$ pour appliquer la formule d'intégration par parties (à connaître par cœur et fort utile !)
$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

- On pose
$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = 2t+1 & v'(t) = 2 \end{array}$$
On a donc
$$\begin{aligned}\int_0^1 (2t+1)e^t\mathrm{d}t &= \left[(2t+1)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2e^t\mathrm{d}t\\ &= 3e-1-2\int_0^1 e^t\mathrm{d}t\\ &= 3e-1-2(e-1) = e+1\end{aligned}$$

- On pose
$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin(t) & u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = t+4 & v'(t) = 1 \end{array}$$
On a donc
$$\begin{aligned} \int_0^\pi (t+4)\sin(t)\mathrm{d}t &= [(t+4)(-\cos(t))]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= (\pi+4+4) + [\sin(t)]_0^p i = \pi + 8 \end{aligned}$$
- On pose
$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t^2+t+1 & v'(t) = 2t+1 \end{array}$$
On a donc
$$\begin{aligned} \int_0^4 (t^2+t+1)e^t\mathrm{d}t &= \left[(t^2+t+1)e^t\right]_0^4 - \int_0^4 (2t+1)e^t\mathrm{d}t \\ &= 21e^4 - 1 - \int_0^4 (2t+1)e^t\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Pour calculer l'intégrale restante, on effectue à nouveau une intégration par parties avec $u(t) := e^t$ et $v(t) := 2t+1$ et il vient alors
$$\int_0^4 (2t+1)e^t\mathrm{d}t = [(2t+1)e^t]_0^4 - 2\int_0^4 e^t\mathrm{d}t = 9e^4 - 1 - 2(e^4-1) = 7e^4+1.$$
Ainsi,
$$\int_0^4 (2t+1)e^t\mathrm{d}t = 21e^4 - 1 - 7e^4 - 1 = 14e^4 - 2.$$
- On pose dans un premier temps
$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^{2t} & u(t) = \frac{e^{2t}}{2} \\ v(t) = t^2 & v'(t) = 2t \end{array}$$
On obtient
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 t^2e^{2t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2e^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t \\ &= 2(e^4 - e^{-4}) - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t \\ &= 4\mathrm{sh}(4) - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$
On pose ensuite $u(t) := \frac{e^{2t}}{2}$ et $v(t) := t$ pour effectuer une seconde intégration par parties et obtenir
$$\int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 - \frac{1}{2}\int_{-2}^2 e^{2t}\mathrm{d}t = e^4 + e^{-4} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 = 2\mathrm{ch}(4) - \frac{\mathrm{sh}(4)}{2},$$
et donc
$$\int_{-2}^2 t^2e^{2t}\mathrm{d}t = 4\mathrm{sh}(4) - \left(2\mathrm{ch}(4) - \frac{\mathrm{sh}(4)}{2}\right) = \frac{9}{2}\mathrm{sh}(4) - 2\mathrm{ch}(4).$$
- C'est plus astucieux ici, on pose
$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \arctan(t) & v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\sqrt{3}} 1\times\arctan(t)\mathrm{d}t\\ &= [t\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, et la dernière intégrale ci-dessus est de la forme $\int \frac{u'}{u}$ et donc il vient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(t)\mathrm{d}t = \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}[\ln(|1+t^2|)]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 4}{2}.$$

- On pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin(t) & u(t) = -\cos(t)\\ v(t) = \sin(t) & v'(t) = \cos(t)\end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t &= [-\cos(t)\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$ valable pour tout $t\in\mathbb{R}$ et on écrit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

- On pose ici

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t\\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t}\end{array}$$

On a donc

$$\int_1^2 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 1\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

Remarquons qu'au passage, on a montré que la fonction $t\mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln.

- On pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = t^2 & u(t) = \frac{t^3}{3}\\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t}\end{array}$$

$$\int_1^2 t^2\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2\frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\ln 2 - \int_1^2\frac{t^2}{3}\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\ln 2 - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Exercice 3. Il y a deux façons (en fait équivalentes) de faire un changement de variables. Considérons une intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

On a le changement de variable direct, qui commence en posant une équation de la forme $x = \psi(t)$, on a alors $dx = \psi'(t)dt$, et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

On a également le changement de variable "inverse", en posant $\phi(x) = t$, mais en posant $\psi = \phi^{-1}$ la réciproque de ϕ, alors on retrouve un changement de variable direct, on en déduit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(t))\frac{dt}{\phi'(\phi^{-1}(t))}$$

- Ici, tous les x qui apparaissent sont en fait dans des e^x, on pose donc $t = e^x$. On aurait donc $\phi(x) = e^x$, et $x = \ln(t)$, donc $\psi(t) = \ln(t)$ on a donc

  $$a' = e^0 = 1, b' = e^1 = e, dt = e^x dx = tdx$$

  On obtient alors
  $$\int_0^1 e^x \sin(e^x)\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t\sin(t)}{t}\frac{dt}{t} = \int_1^e \sin(t)\mathrm{d}t = \cos(1) - \cos(e).$$

- La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$ n'est pas définie en 0 et tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$, donc l'intégrale n'existe pas ! (On peut lui donner un sens, mais ça donnerai une valeur infinie en l'occurrence).
- Si $t = \ln x$, alos $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ donc $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$ et donc

  $$\int_1^2 \frac{\sin(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \frac{\sin(t)}{e^t}e^t\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} \sin(t)\mathrm{d}t = 1 - \cos(\ln 2).$$

- Si $t = \arctan x$, alors $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, donc $\mathrm{d}x = (1+x^2)\mathrm{d}t = (1+\tan^2(t))\mathrm{d}t$ et donc

  $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{1+\tan^2(t)}(1+\tan^2(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

- Le changement de variable $t = \sin(x)$ donne $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc

  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin(x))\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(t)\frac{\cos(\arcsin(t))}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{d}t = 1 - \cos(1).$$

- Enfin, le changement de variable $t = e^x$ donne ici

  $$\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

  $$= [\ln(|t^2+t+1|)]_1^e = \ln(e^2+e+1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e^2+e+1}{3}\right).$$

Exercice 4.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ est définie partout où $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Ce trinôme est de discriminant $\Delta = 1$ et de racines 2 et 3 ; donc f est définie partout sauf en 2 et 3 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\} =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Ici typiquement on utilise un raisonnement par analyse synthèse : on suppose que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme souhaitée, et après calcul on trouve effectivement une écriture qui convient : on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \\
&= \frac{a(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{b(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{c(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{a(x^2-5x+6)}{(x^2-5x+6)} + \frac{b(x-3)}{(x^2-5x+6)} + \frac{c(x-2)}{(x^2-5x+6)} \\
&= \frac{a(x^2-5x+6) + b(x-3) + c(x-2)}{(x^2-5x+6)} \\
&= \frac{ax^2 + (-5a+b+c)x + 6a - 3b - 2c}{(x^2-5x+6)}
\end{aligned}$$

En identifiant les numérateurs, on obtient que $x^2+1 = ax^2 + (-5a+b+c)x + 6a - 3b - 2c$, ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a = 1 \\ -5a + b + c = 0 \\ 6a - 3b - 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 3b + 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 10 \end{cases}$$

On trouve alors que

$$f(x) = 1 + \frac{-5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

2. Tout l'intérêt de la décomposition calculée à la question précédente est qu'elle permet 'facilement' de calculer des intégrales (c'est la ***décomposition en éléments simples*** des fractions rationnelles). Commençons par noter que f est bien définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$, l'intégrale à calculer est donc bien définie. Ensuite, des primitives de $\frac{1}{x-2}$ et $\frac{1}{x-3}$ sur $[0,1]$ sont données par $\ln(|x-2|) = \ln(2-x)$ et $\ln(|x-3|) = \ln(3-x)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 1 + \frac{-5}{x-2} + \frac{10}{x-3} dx \\
&= \int_0^1 1dx - 5\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx + 10\int_0^1 \frac{1}{x-3}dx \\
&= 1 - 5\left[\ln(2-x)\right]_0^1 + 10\left[\ln(3-x)\right]_0^1 \\
&= 1 - 5(-\ln(2)) + 10(\ln(2) - \ln(3)) \\
&= 1 + 15\ln(2) - 10\ln(3)
\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. La fonction g est une fraction rationnelle, elle n'est pas définie si et seulement si $(x+1)^2(x-1) = 0$, comme ceci est un produit, il est nul si et seulement si un des facteurs est nul, autrement dit si $x = 1$ ou $x = -1$, donc

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Ensuite, pour calculer la décomposition de g, on utilise le même raisonnement qu'à l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
g(x) &= ax+b+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}+\frac{e}{x-1}\\
&= \frac{ax(x+1)^2(x-1)+b(x+1)^2(x-1)+c(x+1)(x-1)+d(x-1)+e(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}\\
&= \frac{a(x^4-x^2+x^3-x)+b(x^3-x+x^2-1)+c(x^2-1)+d(x-1)+e(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x-1)}\\
&= \frac{ax^4+x^3(a+b)+x^2(-a+b+c+e)+x(-a-b+d+2e)-b-c-d+e}{(x+1)^2(x-1)}
\end{aligned}$$

On trouve donc le système

$$\begin{cases} a=1\\ a+b=0\\ -a+b+c+e=1\\ -a-b+d+2e=0\\ -b-c-d+e=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ -1-1+c+e=1\\ -1+1+d+2e=0\\ 1-c-d+e=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c+e=3\\ d+2e=0\\ -c-d+e=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=3-e\\ d=-2e\\ e-3+2e+e=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=\frac{9}{4}\\ d=\frac{-3}{2}\\ e=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Et donc

$$g(x)=x-1+\frac{9}{4(x+1)}+\frac{-3}{2(x+1)^2}+\frac{3}{4(x-1)}$$

2. Commençons par noter que g est bien définie et continue sur l'intervalle $[0,1/2]$, l'intégrale à calculer est donc bien définie. Ensuite, des primitives de $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)^2}$ et $\frac{1}{x-1}$ sur $[0,1/2]$ sont données par $\ln(x+1)$, $\frac{-1}{x+1}$ et $\ln(|x-1|)=\ln(1-x)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} g(x)dx &= \int_0^{1/2} x-1dx+\frac{9}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x+1}dx-\frac{3}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{(x+1)^2}dx+\frac{3}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x-1}dx\\
&= \left[x^2/2-x\right]_0^{1/2}+\frac{9}{4}\left[\ln(x+1)\right]_0^{1/2}-\frac{3}{2}\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^{1/2}+\frac{3}{4}\left[\ln(1-x)\right]_0^{1/2}\\
&= \frac{-3}{8}+\frac{9}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{3}+1\right)+\frac{3}{4}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{-7}{8}+\frac{1}{4}\left(9\ln(3)-9\ln(2)-3\ln(2)\right)\\
&= \frac{-7}{8}+\frac{1}{4}\left(9\ln(3)-12\ln(2)\right)
\end{aligned}$$

† *Exercices théoriques*

Exercice 6. On fait le changement de variable $y=a+b-x$ dans l'intégrale (et alors $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$) pour obtenir

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a (a+b-y)f(a+b-y)\mathrm{d}y=(a+b)\int_a^b f(y)\mathrm{d}y-\int_a^b yf(y)\mathrm{d}y,$$

ce qui entraîne

$$2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et donc

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 7.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives, donc l'intégrale

$$I_n(x) := \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, elle définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la primitive de f_n qui s'annule en 0 et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

2. C'est astucieux ! On écrit

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} + \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}} + \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) + \int_0^x \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) := \frac{1}{-n(1+t^2)^n}$ et $v(t) := \frac{t}{2}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t &= \int_0^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\left(I_n(x) - \frac{x}{(1+x^2)^n}\right). \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_n(x) = I_{n+1}(x) + \frac{1}{2n}\left(I_n(x) - \frac{x}{(1+x^2)^n}\right)$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)I_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}.$$

3. Pour I_1 on a une primitive qui est $t \mapsto \arctan(t)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x).$$

Ensuite, on peut utiliser la relation de récurrence prouvée ci-dessus et écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_2(x) = \frac{1}{2}I_1(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)}.$$

De même, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_3(x) = \frac{3}{4}I_2(x) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} = \frac{3\arctan(x)}{8} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2}.$$

Exercice 8. On sait que l'intégrale est une "fonction croissante", au sens où si $g(t) \leqslant f(t)$ pour $t \in [a,b]$, alors $\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)dt$. En l'occurrence, on obtient

$$\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b M dt \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

On obtient le résultat en divisant par $b-a$.

† *Applications aux sciences*

Exercice 9. Le 'tout petit peu d'initiative' mentioné dans l'énoncé consiste à utiliser une différence, et une valeur absolue : l'aire algébrique entre deux courbes f et g est donnée par l'intégrale de $f(x)-g(x)$, mais cette valeur peut être négative, par contre l'intégrale de $|f(x)-g(x)|$ est quand à elle une quantité positive, qui représente bien l'aire géométrique.

1. Pour calculer l'aire comprise entre les courbes d'équations $f(x)=x^2-8x+14$ et $g(x)=-x^2-4x+15$, on calcule $f(x)-g(x)=2x^2-4x-1$. Pour connaitre $|f(x)-g(x)|$, on calcule le signe de $f(x)-g(x)$:

$$\Delta = 16+8=24, \quad x_1 = 1-\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

on a donc

$$|f(x)-g(x)| = \begin{cases} 2x^2-4x-1 & \text{si } x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}/2] \cup [1+\sqrt{6}/2, +\infty[\\ -2x^2+4x+1 & \text{si } x \in [1-\sqrt{6}/2, 1+\sqrt{6}/2] \end{cases}$$

Qui permet de calculer l'aire souhaitée selon les valeurs de a et b.

2. De même, on calcule

$$\int_0^\pi |g(t)-f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(t)-\sin(t)\cos(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(t)(1-\cos(t))|\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)(1-\cos(t))\mathrm{d}t$$

En faisant une intégration par parties, on trouve que

$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = [\sin^2(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

soit

$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$\int_0^\pi \sin(t)(1-\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = 2.$$