Correction feuille 6

† *Études complètes de fonctions*

Exercice 1.
1. La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + x - 2$ est un polynôme. La fonction f est donc définie si et seulement si $u(x) \geqslant 0$, on calcule donc

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

donc u est positif sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$, qui est donc le domaine de définition de f.
2. La dérivée de $\sqrt{u(x)}$ est donnée par $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, comme $u'(x) = 2x + 1$, on a

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

cette formule n'est définie que sur $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, qui est donc le domaine de dérivabilité de f.
3. On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + x - 2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 + x - 2 = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

De plus, on a $f(-2) = \sqrt{u(-2)} = 0 = \sqrt{u(1)} = f(1)$.
4. On calcule directement

$$\begin{aligned} f(-1-x) &= \sqrt{(-1-x)^2 + (-1-x) - 2} \\ &= \sqrt{(1+x)^2 - 1 - x - 2} \\ &= \sqrt{1 + 2x + x^2 - 1 - x - 2} \\ &= \sqrt{x^2 + x - 2} = f(x) \end{aligned}$$

ainsi, le graphe de f admet une symétrie axiale d'axe $x = \frac{-1}{2}$, en effet on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{2} - x\right) &= f\left(-1 - \left(\frac{-1}{2} - x\right)\right) \\ &= f\left(-1 + \frac{1}{2} + x\right) \\ &= f\left(\frac{-1}{2} + x\right) \end{aligned}$$

5. Les variations de f sont données par le signe de f'. Comme le dénominateur de f' est une racine, il s'agit d'une quantité positive, donc le signe de f' est le signe de $2x + 1$, d'où le tableau de signes/variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

5. On utilise la quantité conjuguée, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x-2}-\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+x-2}^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{x^2+x-2-\left(x^2+x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{-2+\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}=0$$

Ainsi, f admet la droite $y=x+\frac{1}{2}$ comme asymptote en $+\infty$ (par symétrie, f admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $y=-x+\frac{1}{2}$)

6. Comme on a $\lim_{x\to 1} 2x+1=3$ et $\lim_{x\to 1^+} 2\sqrt{x^2+x-2}=0^+$, on a $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=+\infty$.

7.

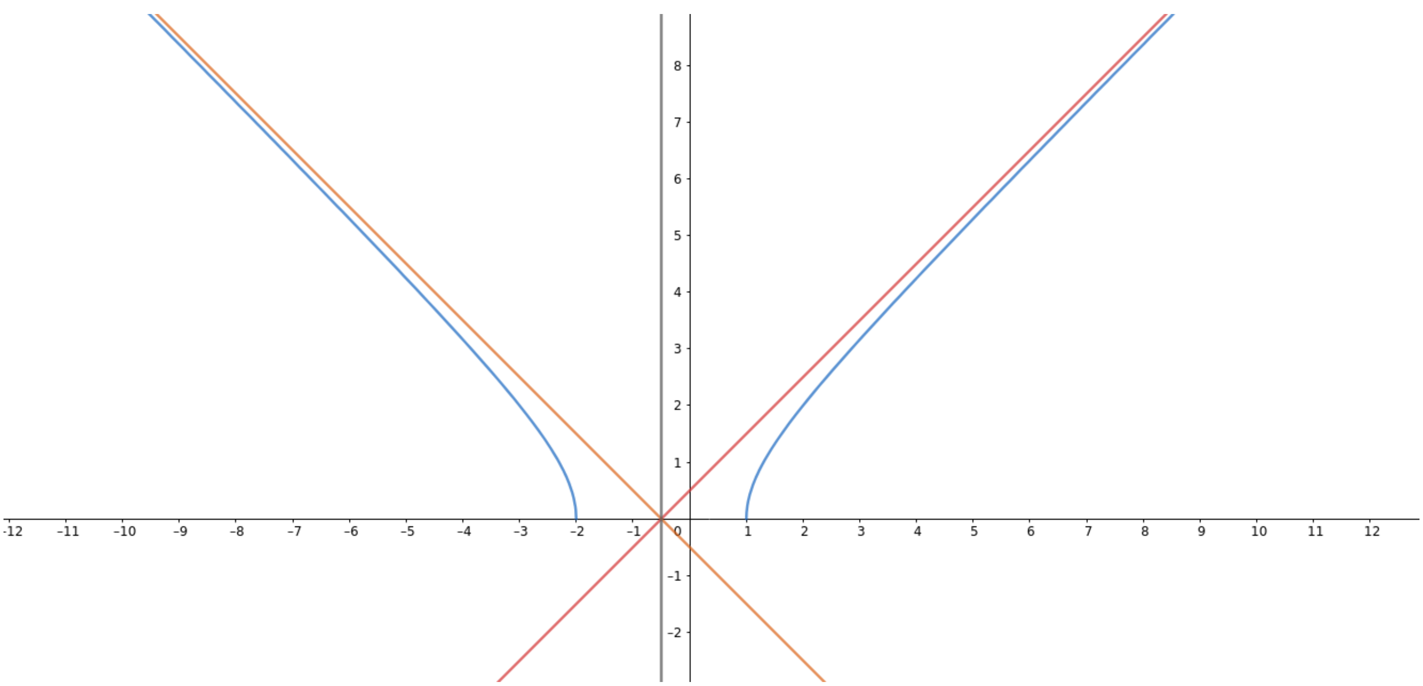

Figure 1 – Graphe de f avec asymptotes et axe de symétrie

Exercice 2.

1. La fonction f est définie par la formule $f(x) = \frac{\sqrt{u(x)}}{\sqrt{v(x)}}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$ et $v(x) = x + 1$. Pour que f soit définie, il faut que $u(x)$ et $v(x)$ soit positifs (pour que les racines soient définies) et que $v(x)$ soit non nul (pour que le quotient soit défini). On doit donc avoir $x + 1 > 0$ (donc $x > -1$) et $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$. On calcule

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Donc

$$D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\cap]-1, +\infty[=]-1, 1] \cup [2, +\infty[$$

2. On calcule

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{0^+} = +\infty$$
$$f(1) = 0 = f(2)$$
$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}} = +\infty$$

en appliquant la règle des monômes de plus haut degré.

3. La fonction f est dérivable sauf au bord de son domaine de définition (en l'occurrence, sauf en 1 et 2). La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \sqrt{\frac{v(x)}{4u(x)}} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \sqrt{\frac{v(x)}{4u(x)}}$$

Comme on a $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x + 2)}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{4(x^2 - 3x + 2)}} \\ &= \frac{2x^2 - 3x + 2x - 3 - x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{4(x^2 - 3x + 2)}} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{4(x^2 - 3x + 2)}} \end{aligned}$$

4. On a $6 > 2^2 = 4$, donc $\sqrt{6} > 2$, de même on a $3 > \sqrt{6}$, donc $2 > \sqrt{6} - 1 > 1$ et $\sqrt{6} - 1$ n'est pas dans D_f. Ensuite, comme $\sqrt{6} > 0$, on a $-1 - \sqrt{6} < -1$ donc $-1 - \sqrt{6}$ n'est pas non plus dans D_f.

5. Les variations de f sont données par le signe de f', qui est donné par le signe de $x^2 + 2x - 5$, on calcule

$$\Delta = 4 + 20 = 24, \quad x_1 = -1 - \sqrt{6}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{6}$$

on a donc le tableau de signes/variations suivant :

x	-1		-1		$-1+\sqrt{6}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

6. On calcule directement

$$x - a + \frac{6}{x+1} = \frac{(x-a)(x+1)}{x+1} + \frac{6}{x+1}$$
$$= \frac{x^2 + x - ax - a + 6}{x+1}$$
$$= \frac{x^2 + (1-a)x + 6 - a}{x+1}$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, on doit avoir $1 - a = -3$ et $6 - a = 2$, on trouve donc $a = 4$ et on a bien

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} = x - 4 + \frac{6}{x+1}$$

autrement dit

$$f(x)^2 - (x-4) = \frac{6}{x+1}$$

7. On utilise la quantité conjuguée :

$$f(x) - \sqrt{x-4} = \frac{(f(x) - \sqrt{x-4})(f(x) + \sqrt{x-4})}{f(x) + \sqrt{x-4}}$$
$$= \frac{f(x)^2 - (x-4)}{f(x) + \sqrt{x-4}}$$
$$= \frac{6}{(x+1)(f(x) + \sqrt{x-4})}$$

Cette dernière quantité a clairement 0 pour limite en $+\infty$.

8. D'après la question précédente, les graphes de f et de g sont asymptotes l'un de l'autre.

9.

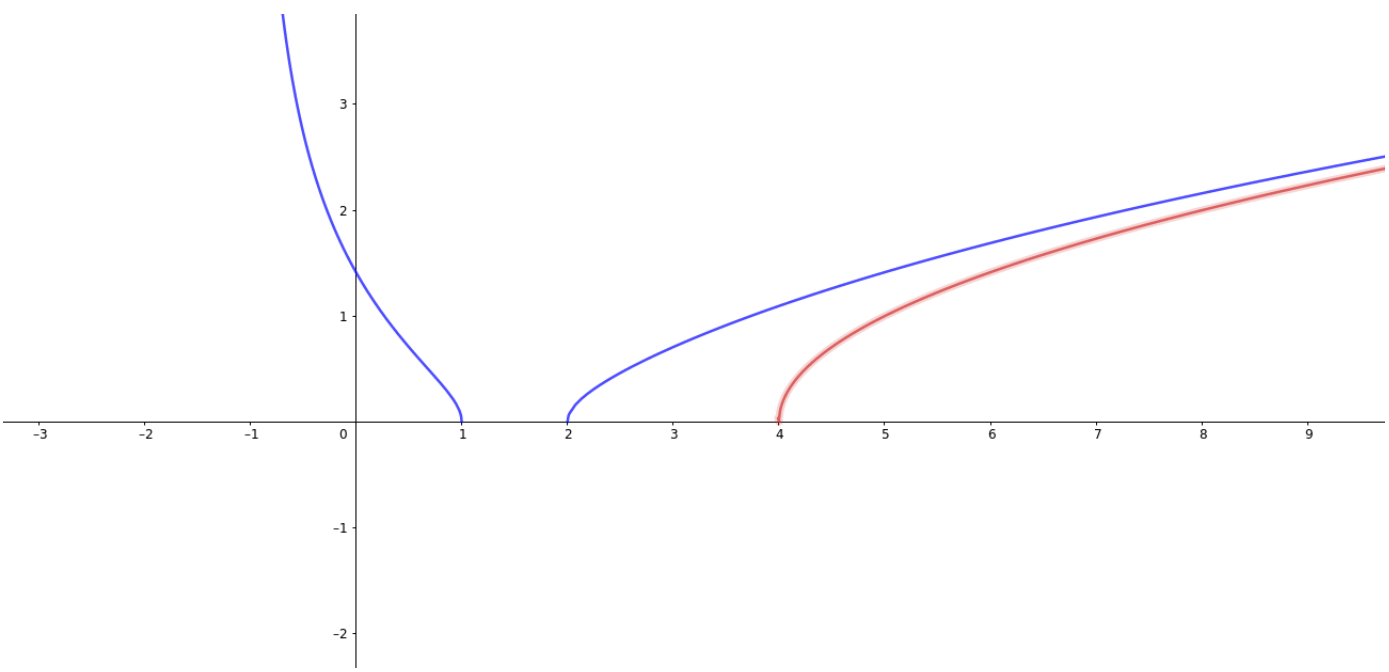

FIGURE 2 – Graphe de f et de g

Exercice 3.

1. La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 - 5x + 6$ est un polynôme. La fonction f est donc définie si et seulement si $u(x) \geqslant 0$, on calcule donc

$$\Delta = 25 - 24 = 1, \quad x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

donc u est positif sur $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$, qui est donc le domaine de définition de f.

2. On a $2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ et $3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$, soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{5}{2} + h$ soit dans le domaine de définition de f, on a deux possibilités

- $\frac{5}{2} + h \leqslant \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$, ceci équivaut à $h \leqslant -\frac{1}{2}$, à $-h \geqslant \frac{1}{2}$ et à $\frac{5}{2} - h \geqslant \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$, donc $-h + \frac{5}{2}$ est dans le domaine de f.
- $\frac{5}{2} + h \geqslant \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$, ceci équivaut à $h \geqslant +\frac{1}{2}$, à $-h \leqslant -\frac{1}{2}$ et à $\frac{5}{2} + h \leqslant \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$, donc $-h + \frac{5}{2}$ est dans le domaine de f.

Dans tous les cas, on a bien que $\frac{5}{2} + h$ est dans le domaine de f, on a par ailleurs

$$\begin{aligned} f(5/2 - h) &= \sqrt{(5/2 - h)^2 - 5(5/2 - h) + 6} \\ &= \sqrt{25/4 - 5h + h^2 - 25/2 + 5h + 6} \\ &= \sqrt{h^2 + 6 - 25/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5/2 + h) &= \sqrt{(5/2 + h)^2 - 5(5/2 + h) + 6} \\ &= \sqrt{25/4 + 5h + h^2 - 25/2 - 5h + 6} \\ &= \sqrt{h^2 + 6 - 25/4} \end{aligned}$$

Donc $f(5/2 - h) = f(5/2 + h)$, on en déduit que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = 5/2$.

3. La dérivée de $\sqrt{u(x)}$ est donnée par $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, comme $u'(x) = 2x - 5$, on a

$$f'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

cette formule n'est définie que sur $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$, qui est donc le domaine de dérivabilité de f.

4. Les bornes du domaines de définition de f sont $-\infty, 2, 3, +\infty$. On sait que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 5x + 6 = +\infty$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

De plus, on a $f(2) = \sqrt{u(2)} = 0 = \sqrt{u(3)} = f(3)$.

5. On calcule la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2}}$$

La règle des monômes de plus haut degrés donne

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} = 1$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. On calcule alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$, par quantité conjuguée, on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{(\sqrt{x^2-5x+6} - x)(\sqrt{x^2-5x+6} + x)}{(\sqrt{x^2-5x+6} + x)} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2-5x+6} + x} \\ &= \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6} + x} \\ &= \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité admet clairement $\frac{-5}{2}$ pour limite en $+\infty$, donc la droite $y = x - \frac{5}{2}$ est une asymptote de f en $+\infty$. Par symétrie, la droite $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote de f en $-\infty$.

6. Les variations de f sont données par le signe de f'. Comme le dénominateur de f' est une racine, il s'agit d'une quantité positive, donc le signe de f' est le signe de $2x - 5$, d'où le tableau de signes/variations suivant :

x	$-\infty$		2		$5/2$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

7.

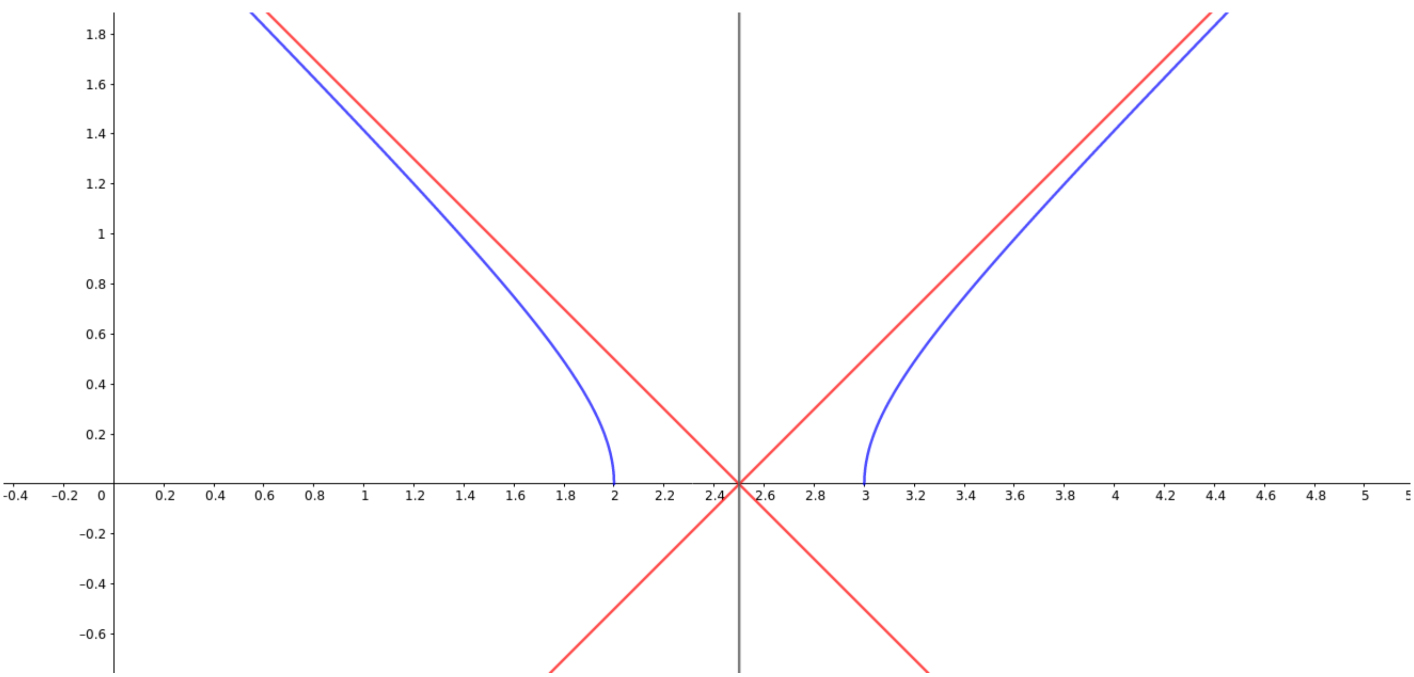

Figure 3 – Graphe de f avec asymptotes et axe de symétrie