Correction feuille 5

† *Parité, symétrie, périodicité, réduction du domaine d'étude*

Exercice 1.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule
$$f_1(-x) = (-x)^4 + 3 = x^4 + 3 = f_1(x)$$
Donc la fonction f_1 est paire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule
$$f_2(-x) = (-x)^4 - x = x^4 - x$$
Qui n'est égal ni à $f_2(x)$ ni à $-f_2(x)$ en général (par exemple, $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$). La fonction f_2 n'est donc ni paire, ni impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule
$$f_3(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + 1 = -x^5 - x^3 + 1$$
Qui n'est égal ni à $f_3(x)$ ni à $-f_3(x)$ en général (par exemple, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 3$), la fonction f_3 n'est donc ni paire, ni impaire.

Exercice 2.
1. Comme la fonction f est impaire, on a :
$$f(0) = f(-0) = -f(0)$$
donc $2f(0) = 0$ et $f(0) = 0$.
2. Comme f est une fonction paire, on a
$$f(-x) = f(x)$$
comme f est dérivable, on peut dériver cette équation, la dérivée de $f(x)$ est bien-sûr $f'(x)$, et la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$, on a donc
$$-f'(-x) = f'(x)$$
ce qui veut dire par définition que f' est impaire. De même on peut aussi montrer que la dérivée d'une fonction impaire (et dérivable !) est paire.

Exercice 3.
1. On calcule
$$\begin{aligned} f(6-x) &= (6-x)^2 - 6(6-x) + 2 \\ &= x^2 - 12x + 36 + 6x - 36 + 2 \\ &= x^2 - 6x + 2 = f(x) \end{aligned}$$
2. Comme le milieu de 6 et 0 est 3, on a
$$f(3-x) = f(6-(3-x)) = f(3+x)$$
Et donc le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 3$, on peut donc se contenter d'étudier f sur le domaine $[3, +\infty[$ [1]

1. on aurait pu choisir $]-\infty, 3]$, mais l'autre domaine a l'avantage de ne comporter que des réels de même signe (positif).

Exercice 4.

1. Il faut montrer que $f(-2-x)$ est égal à $f(-2+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, c'est long mais c'est du calcul

$$\begin{aligned}
f(-2-x) =& \frac{-(2+x)^3 + 6(2+x)^2 - \frac{17}{2}(2+x) + 1}{-x} \\
=& \frac{(2+x)^3 - 6(2+x)^2 + \frac{17}{2}(2+x) - 1}{x} \\
=& \frac{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 6(x^2 + 4x + 4) + \frac{17}{2}(x+2) - 1}{x} \\
=& \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + \frac{17}{2}x + 17 - 1}{x} \\
=& \frac{x^3 - \frac{7}{2}x}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-2+x) &= \frac{-(2-x)^3 + 6(2-x)^2 - \frac{17}{2}(2-x) + 1}{x} \\
&= \frac{-(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) + 6(x^2 - 4x + 4) - \frac{17}{2}(-x+2) + 1}{x} \\
&= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 - 24x + 24 + \frac{17}{2}x - 17 - 1}{x} \\
&= \frac{x^3 - \frac{7}{2}x}{x}
\end{aligned}$$

Le graphe de f présente donc une symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = -2$, on peut donc se contenter d'étudier f sur le domaine $]-\infty, -2]$ (toujours négatif).

2. Dire que le graphe de g présente une symétrie centrale par rapport au point de coordonnée $(0,1)$ revient à dire que l'on a $g(1-x) = -g(1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(1-x) = \frac{e^{1-x} - e^{2-1+x}}{2} = \frac{e^{1-x} - e^{1+x}}{2}$$

$$g(1+x) = \frac{e^{1+x} - e^{2-1-x}}{2} = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2} = -g(1-x)$$

On a donc bien une symétrie centrale, on peut donc se contenter d'étudier g sur le domaine $[1, +\infty[$.

Exercice 5. Toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (puisque la fonction sin, les fonctions affines et la fonction $x \mapsto x^2$ le sont). Pour restreindre le domaine d'étude, on va chercher des symétries (on a de bonnes chances d'en trouver, sachant que la fonction sin est impaire). On va également chercher de la périodicité.

1. On a $f_1(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f_1(x)$ pour tout x donc la fonction f_1 est impaire. Par ailleurs, comme $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, alors

$$f_1(x) = \sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) = f_1(x + \pi)$$

donc f_1 est une fonction π-périodique. On peut donc se restreindre à l'intervalle $[0, \pi/2]$, la moitié positive de la période $[-\pi/2, \pi/2]$. .

2. On a $f_2(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f_2(x)$ pour tout x donc la fonction f_2 est paire : on peut se contenter de l'étudier sur $[0, +\infty[$ (ici, il n'y a pas de périodicité à cause du x^2).

3.On sait que le graphe de la fonction sin présente une symétrie centrale par rapport au point $(0,0)$, or, la fonction $x \mapsto 3x - 1$ s'annule en $x = 1/3$, calculons donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_3\left(\frac{1}{3} - x\right) = \sin(1 - x - 1) = \sin(-x) = -\sin(x) = -\sin(1 + x - 1) = -f_3\left(\frac{1}{3} + x\right)$$

Donc la fonction f_3 présente une symétrie centrale par rapport au point $\left(\frac{1}{3},0\right)$, on peut donc se contenter d'étudier f_3 sur le domaine $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$. Par ailleurs, la fonction f_3 est $\frac{2}{3}\pi$-périodique, on peut donc l'étudier sur $[1/3, 1/3(1+\pi)]$.

† *Comportement asymptotique*

Exercice 6.

- En $+\infty$, la fonction f_1 admet clairement $+\infty$ pour limite (le terme de plus haut degré (ici 3) est au numérateur), on a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$
Comme la limite est un réel non nul, on calcule
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_1(x) - 1x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3-2x)-(x^3+x)}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x-x^2-x}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x^2+1} = 0\end{aligned}$$
Comme cette limite est un réel, la fonction f_1 admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 1x+0 = x$.

  En $-\infty$, la fonction f_1 admet clairement $-\infty$ pour limite (le terme de plus haut degré (ici 3) est au numérateur), on a :
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$
Comme la limite est un réel non nul, on calcule
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_1(x) - 1x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3-2x)-(x^3+x)}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x-x^2-x}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x^2+1} = 0\end{aligned}$$
Comme cette limite est un réel, la fonction f_1 admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 1x+0 = x$.
- À nouveau, il est clair que f_2 admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on calcule donc :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+\ln(x)}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x^2}} = 0$$
Comme cette limite est nulle, la fonction f_2 admet une branche parabolique de direction O_x.

  La fonction f_2 n'est pas définie pour les réels inférieurs à 0, donc sa limite en $-\infty$ n'a pas le moindre sens.
- À nouveau, il est clair que f_3 admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on calcule donc :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x^2+2x+5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$
Comme cette limite est un réel non nul, on calcule
$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) - 2x = \frac{4x^2+2x+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+5}+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{2x+5}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

Comme cette limite est un nombre réel, la fonction f_3 admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$.

Le même raisonnement s'applique en $-\infty$.

- À nouveau, il est clair que la fonction f_4 admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, on calcule donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\ln(1+x^4)}{x} = 2$$

Comme cette limite est un réel non nul, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^4) = +\infty$$

Donc la fonction f_4 admet une branche parabolique de direction $y = 2x$.

Le même raisonnement s'applique en $-\infty$.

- La fonction f_5 est définie si et seulement si $x > -1$ (donc on ne peut pas étudier son comportement en $-\infty$), on a alors $f_5(x) = (x+1)^2$, qui admet clairement une branche parabolique de direction O_y en $+\infty$.
- En $+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 + e^{-x}\sin(x) = +\infty$, on calcule donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}\sin(x)}{x} = 2$$

qui est un réel non nul, on calcule donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f_6(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-x}\sin(x) = 1$$

Qui est un nombre réel, la fonction f_6 admet donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$.

En $-\infty$, la fonction f_6 n'admet pas de limite.

† *Fonctions convexes*

Exercice 7. La fonction f est définie comme un quotient de deux polynômes : elle est définie si et seulement si le dénominateur est non nul, or on a $x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, f est continue et infiniement dérivable sur son domaine de définition (en particulier deux fois dérivable).
La fonction f est paire, donc on peut réduire son domaine d'étude à $[0, +\infty[$.
On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2 + 4$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x$, on a alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2x(x^2+4) - x^2(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3 + 8x - 2x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$$

À présent, $f'(x)$ est définie par $f'(x) = \frac{\mu(x)}{\nu(x)}$ avec $\mu(x) = 8x$ et $\nu(x) = (x^2+4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$, donc $\mu'(x) = 8$ et $\nu'(x) = 4x^3 + 16x = 4x(x^2+4)$, donc

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mu'(x)\nu(x) - \mu(x)\nu'(x)}{(\nu(x))^2} \\
&= \frac{8(x^2+4)^2 - 8x(4x(x^2+4))}{(x^2+4)^4} \\
&= 8\frac{x^4+8x^2+16-(4x^2(x^2+4))}{(x^2+4)^4} \\
&= 8\frac{x^4+8x^2+16-4x^4-16x^2}{(x^2+4)^4} \\
&= 8\frac{-3x^4-8x^2+16}{(x^2+4)^4} \\
&= -8\frac{(3x^2-4)(x^2+4)}{(x^2+4)^4} \\
&= -8\frac{(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}
\end{aligned}
$$

Comme f est une fraction rationnelle, on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré pour les limites en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Le tableau de variations de f est donné par le tableau de signes de f'. Comme le dénominateur de f' est un carré strictement positif, le signe de f' est celui de $8x$ (donc positif si et seulement si $x \geqslant 0$), d'où le tableau de signes/variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ensuite, la concavité de f est donnée par le signe de f'', qui est le signe de $-(3x^2-4) = -3x^2+4$, on calcule

$$\Delta = 48, \quad x_1 = \frac{-\sqrt{48}}{-6} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{48}}{-6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

donc le signe de f'' est donné par

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(Attention, comme le coefficient directeur de $-3x^2+4$ est négatif, ce polynôme est positif entre ses racines, et négatif ailleurs). Donc f admet des points d'inflexion en $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, elle est convexe entre $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (et concave ailleurs).

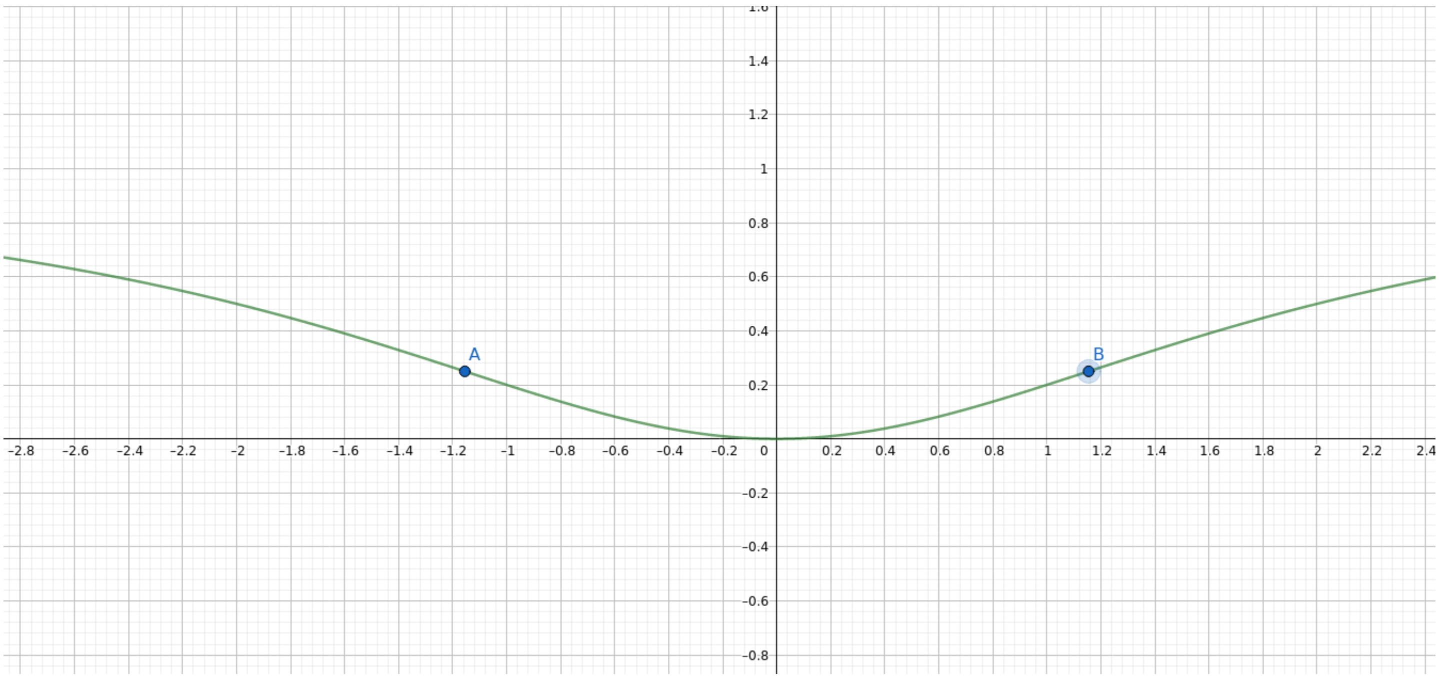

FIGURE 1 – Graphe de f avec points d'inflexion

Exercice 8. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, convexe et croissante. Par hypothèse, on a $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Supposons que f n'est pas constante, dans ce cas il existe un x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$, et comme $f' \geqslant 0$, on a $f'(x_0) > 0$.
Comme f'' est positive, f' est croissante, donc $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ pour $x \geqslant x_0$. Soit y un réel $\geqslant x_0$, par le théorème des accroissements finis, il existe $x \in [x_0, y]$ tel que $f'(x) = \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$, on a donc

$$f(y) - f(x_0) \geqslant (y - x_0)f'(x_0) \Rightarrow f(y) \geqslant f(x_0 + (y - x_0)f'(x_0)$$

autrement dit, f est "éternellement au dessus de sa tangente" après x_0, comme cette tangente a une pente positive, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, d'où le résultat.