Correction feuille 4

Règle de l'Hopital :
Si f et g sont deux fonctions définies autour d'un point a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

c'est un peu moins fort que ce que je vous ait dit en TD : j'avais dit que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ce qui est en fait faux en général : cela ne marche pas pour

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x}$$

Cette limite existe (et vaut 0), mais la limite du quotient des dérivées n'existe pas.
Par contre, il est vrai de dire que si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors elle est égale à la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Comment rédiger tout cela ? Identifiez f et g, écrivez un truc du genre « On cherche à appliquer la règle de l'Hôpital, on calcule donc la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. », calculez la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, une fois que c'est fait, écrivez « par la règle de l'Hôpital, cette limite est égale à la limite de départ ».

† *Calcul de limite*

Exercice 1.

- Comme dans toutes ces limites de fractions rationnelles en $\pm\infty$, c'est la règle des monômes de plus haut degré qui s'applique. Il n'est pas indispensable de s'en souvenir par cœur, il suffit de diviser par autant de puissances de x qu'il faut pour lever l'indétermination. Ici par exemple, on peut diviser par x qui peut être supposé non nul puisqu'on prend la limite en $+\infty$. On écrit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3-\frac{4}{x}}{-7+\frac{2}{x}}$$

  et cette forme indéterminée n'en est plus une : le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers -7, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = -\infty.$$

- On procède de même et on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{5x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}} = \frac{2}{5}.$$

- De même

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^4-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{x^2-\frac{5}{x}} = 0.$$

- Ici c'est un petit peu plus astucieux : on peut appliquer la règle de l'Hopital : on a

$$(x-1)' = 1 \quad \text{et} \quad (x^n-1)' = nx^{n-1}$$

  donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

  On pouvait aussi penser aux sommes de suites géométriques : $1+\cdots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, doit l'inverse de l'expression dont on recherche la limite.

- Distinguons si $x \to 1^+$ ou si $x \to 1^-$. Le numérateur vaut 1 en 1 et le dénominateur tend vers 0^+ pour $x \to 1^-$ et vers 0^- quand $x \to 1^+$, donc la limite n'existe pas :
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+3x-4}{-2x+2} \text{ n'existe pas.}$$
- On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{-x}\sin(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{e^x}\right| \leqslant \frac{1}{e^x}$$
qui tend vers 0 en $+\infty$, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin(x) = 0.$$
- Comme la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$ et que x tend vers $+\infty$, la limite voulue n'existe pas. Plus précisément, si $x \mapsto x\sin(x)$ admettait une limite, elle devrait être nulle puisqu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{(4n+1)\pi}{2}\sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \frac{(4n+1)\pi}{2} > 0$$
et
$$\frac{(4n+3)\pi}{2}\sin\left(\frac{(4n+3)\pi}{2}\right) = -\frac{(4n+3)\pi}{2} < 0$$
et on voit alors que la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ possède des valeurs négatives et positives pour x aussi grand qu'on veut. Or, si la limite est nulle, alors sin est aussi de limite nulle en $+\infty$, ce qui est absurde.
- Ici, on peut être tenté d'utiliser l'expression conjuguée, mais cela ne marche pas (essayez !, le problème vient du fait que les puissances de x sous les racines ne sont pas les mêmes et donc ne se simplifient pas). On écrit plutôt que, pour $x \geqslant 0$, on a
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x+1}\left(1 - \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}\right)$$
On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$ (par comparaison des monômes de plus hauts degrés), donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}} = -\infty$, on a donc une limite de la forme $+\infty \times -\infty$, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} = -\infty$$
- Cette fois-ci, on peut utiliser l'expression conjuguée et écrire
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 0.$$
- On ne s'embarrasse pas du x^{122} et on écrit
$$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{2^x + \ln(x)}{3^x + x^{122}} \leq \frac{2^x+\ln(x)}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{\ln x}{3^x}.$$
Comme $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, la limite de $\left(\frac{2}{3}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ en $+\infty$ est nulle. D'autre part, comme $\ln 3 > \ln e = 1$, on a que $\frac{x}{3^x} = \frac{x}{e^{x\ln 3}} \leq \frac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{3^x} = 0$$
donc que
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{\ln(x)}{3^x} = 0$$
et donc que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+\ln x}{3^x+x^{122}} = 0.$$

- Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (c'est la règle de l'Hôpital), on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = +\infty.$$

- Comme $\lim_{x\to+\infty}(1+x^2) = +\infty$, on a directement

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty.$$

- De même, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty.$$

- Ici, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- On a $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} e^x$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} x + e^x = +\infty.$$

- Enfin, comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \ln^3(1+x^2) = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\ln^3(1+x^2)} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0.$$

Exercice 2.

- On utilise l'expression conjuguée et on écrit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} -\frac{2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}} = -1.$$

- C'est encore l'expression conjuguée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+4} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+4} - \sqrt{4}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+4-4}{x(\sqrt{x^2+x+4} + 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

  J'avais également donné l'autre méthode consistant à poser $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$ et à voir la limite demandée comme un taux d'accroissement en 0, la limite est alors $f'(0) = \frac{1}{4}$.
  Et bien-sûr, on peut utiliser la règle de l'Hôpital, en dérivant en haut et en bas, ce qui revient essentiellement au même.

- Nous allons donner deux méthodes (éssentiellement identiques) pour trouver le résultat. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

  On introduit de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $N := \frac{1}{n}$. Le terme général de la suite (v_n) se réécrit
$$v_n = \ln(u_n) = \frac{\ln(N+1)}{N}.$$
Si l'on cherche à calculer la limite de (v_n), on peut reconnaître un taux d'accroissement en 1 de la fonction ln et écrire
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{N\to 0} \frac{\ln(1+N) - \ln 1}{N} = \ln'(1) = 1$$
et on en déduit que
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n} = e^1 = e.$$
2. On peut remarquer que le terme de (v_n) s'écrit encore
$$v_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n(\ln(n+1) - \ln(n)).$$
Or, par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in]n, n+1[$ tel que
$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln'(x_n) = \frac{1}{x_n}.$$
Comme, pour tout n on a $x_n \in]n, n+1[$, il vient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < v_n = \frac{n}{x_n} \leq \frac{n}{n+1}$$
donc la suite (v_n) tend vers 1 quand $n \to \infty$ par le théorème des gendarmes et donc
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n} = e.$$

Dans tous les cas, on a obtenu la limite importante suivante
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$
En utilisant la même méthode, essayez de montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

- On a, avec la règle de l'Hôpital que l'on peut appliquer (le vérifier !)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin(2x)}{2x} = 2.$$
- De même, comme $x \mapsto \sin(2x)$ ne s'annule qu'en 0, que $x \mapsto 2\cos(2x)$ ne s'annule pas en 0, la règle de l'Hôpital permet d'écrire
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3\cos(3\times 0)}{2\cos(2\times 0)} = \frac{3}{2}.$$
- On recycle le calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pour écrire
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\frac{\sin x}{x} = 0.$$
- Et on le recycle encore :
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - 3x^2}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} (2x-3)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = -3.$$

- On utilise la deuxième règle de l'Hôpital. On le fait pour $x \to 0^-$; pour $x \to 0^+$ c'est exactement pareil. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 en 0^- et le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1, 0[$. Le numérateur est une fonction dérivable sur $[-1, 0[$, de dérivée $x \mapsto \sin(2x) + 2x\cos(2x)$. De même, le dénominateur est dérivable sur $[-1, 0[$, de dérivée $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ qui ne s'annule pas sur $[-1, 0[$. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital et écrire

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x) + 2x\cos(2x)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0^-} (1+x^2)\left(\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right) + \cos(2x)\right) = 2,$$

  et de même on obtient $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = 2$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = 2.$$

- Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et que sin n'a pas de limite en $+\infty$, la limite n'existe pas

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\ln(x)) \text{ n'existe pas.}$$

- De même, comme sin n'a pas de limite en $+\infty$, la limite n'existe pas

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas.}$$

- Comme on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

  la limite recherchée est nulle

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

† *Continuité, prolongement par continuité*

Exercice 3. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < -1 \\ 3x + 7 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \frac{20\cos(2\pi x)}{x+1} & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \end{array}$$

On a, par définition de f :

$$f(-1) = 4 \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^2 - 3x = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 3x + 7 = 4,$$

ainsi que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x + 7 = 10 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{20\cos(2\pi x)}{x+1} = 10.$$

Donc,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 10 \neq 0 = f(1)$$

et on a

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 4 = f(-1).$$

Des calculs ci-dessus, on tire que f est continue en -1 mais pas en 1. Il est par ailleurs clair que f est continue ailleurs et qu'on a donc

$$DC(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x-4}{x^2-16} & \text{si} & x \neq \pm 4 \\ a & \text{si} & x = -4 \\ b & \text{si} & x = 4 \end{array} \right. \end{array}$$

On a

$$\forall x \neq 4,\ f(x) = \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{x+4},$$

d'où

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} \frac{1}{x+4} = -\infty, \quad \lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 4} f(x) = \frac{1}{8}.$$

Ainsi, f n'admet jamais de limite en -4, donc n'y est jamais continue. Elle est continue en 4 si et seulement si $\frac{1}{8} = \lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = b$. On en tire que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ DC(f) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\} & \text{si} & b \neq \frac{1}{8} \\ \mathbb{R} \setminus \{-4\} & \text{si} & b = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Exercice 5.

- Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{|x|^{\frac{3}{2}}-1}{x-1} \end{array}$$

  La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée, combinaison linéaire et quotient de fonctions continues. Ensuite, on a, en utilisant l'expression conjuguée

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(x^{\frac{3}{2}}+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^{\frac{3}{2}}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^{\frac{3}{2}}+1} = \frac{3}{2}.$$

  Ainsi, on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$ en posant

$$f(1) := \frac{3}{2}.$$

- Ici, la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array}$$

  est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Par contre, on a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \notin \mathbb{R},$$

  donc g ne peut pas être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

1.La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie dès que ln l'est, i.e. sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où

$$D_f = \mathbb{R}_+^*.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui y sont dérivables et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

La dérivée f' s'annule en e^{-1}, est négative sur $]0, e^{-1}[$ et positive sur $]e^{-1}, +\infty[$, d'où le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

On a donc une branche parabolique de direction O_y en $+\infty$. On a de plus $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées et $f(1) = 0$, avec une tangente d'équation $T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$. On en déduit l'allure du graphe de f :

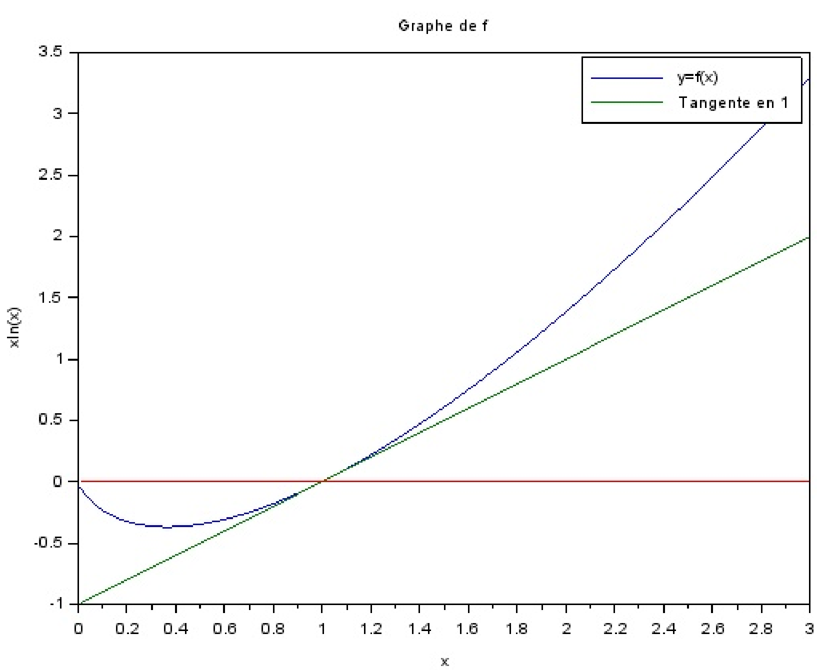

FIGURE 1 – Allure du graphe de $f : x \mapsto x \ln(x)$

Exercice 7.

1. Soit la fonction réelle de deux variables réelles $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+xy+1}$. Cette fonction est définie dès que $x^2+xy+1 \neq 0$, i.e. dès que $y \neq -\frac{x^2+1}{x} = -\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Étudions donc la fonction $u : x \mapsto -x-\frac{1}{x}$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \neq 0,\ u'(x) = \frac{1}{x^2} - 1.$$

Le tableau de variations de u est donné par

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{x^2} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x)+x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

On a donc une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y=-x$. De même, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} u(x)+x = 0,$$

donc l'asymptote oblique en $+\infty$ est aussi une asymptote oblique en $-\infty$. On en déduit l'allure du graphe de u et donc le domaine de définition de f, qui est tout le plan, privé de la courbe en rouge ci-dessous :

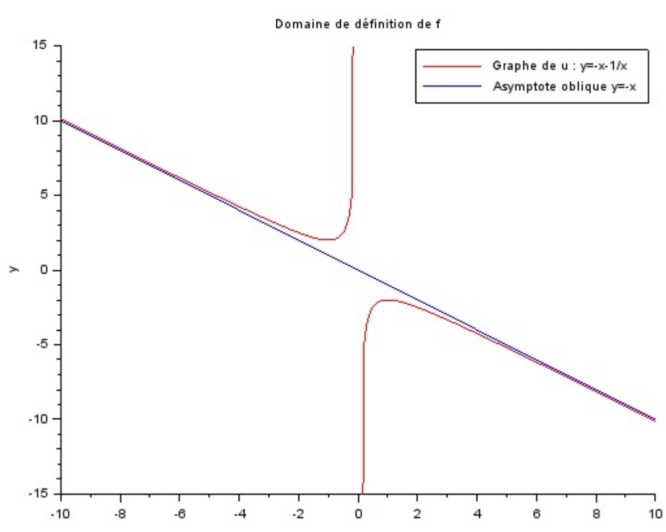

Figure 2 – La fonction f est définie hors de la courbe rouge

2. La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y)$ est définie dès que $x + y > 0$, i.e. dès que $y > -x$. Il s'agit du domaine repreésenté par les points noirs sur la figure suivante (attention, la ligne verte n'est pas incluse dans le domaine de définition de g) :

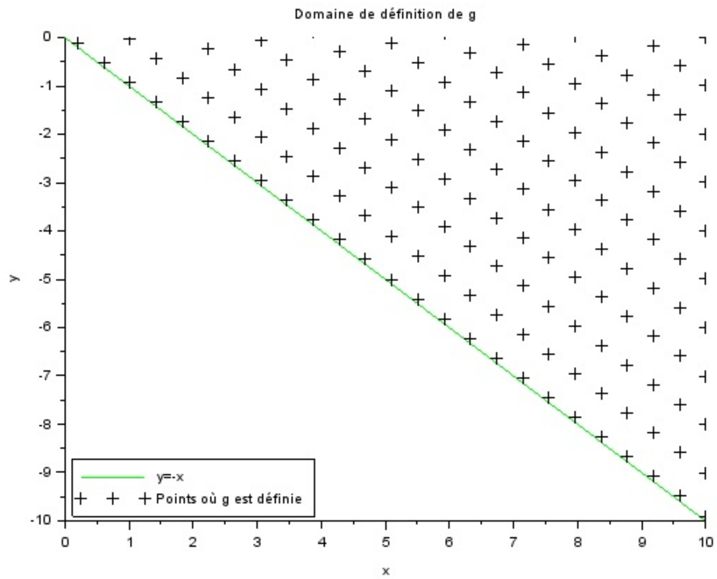

FIGURE 3 – Délimitation du domaine de g

3. La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{\ln(x - y)}$ est définie dès que $\ln(x - y)$ est défini et est positif ou nulle, i.e. dès que $x - y \geq 1$ i.e. dès que $y \leq x - 1$. Il s'agit du domaine représenté par les points verts sur la figure suivante (ici la ligne verte est incluse dans le domaine de h) :

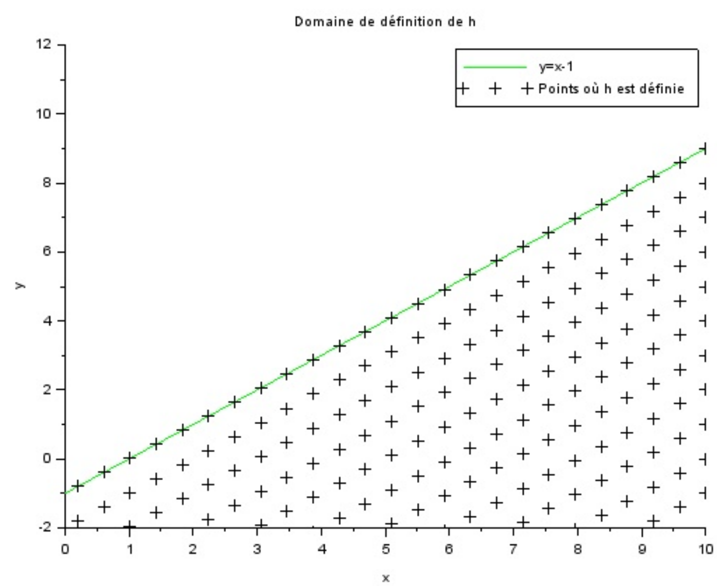

FIGURE 4 – Délimitation du domaine de h

Exercice 8.
1.Soit la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y+\sin(xy) \end{array}$$

Les dérivées partielles de f peuvent être calculées en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+y\cos(xy) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+x\cos(xy) \end{cases}$$

2. La fonction $g:(x,y)\mapsto \frac{x\sin(y)+y\cos(x)}{xy}$ est définie dès que $xy\neq 0$, i.e. dès que $x\neq 0$ et $y\neq 0$ et en peut calculer ses dérivées partielle en chacun de ces points en utilisant la formule de dérivation des quotients :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy\neq 0,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{(\sin(y)-y\sin(x))xy-y(x\sin(y)+y\cos(x))}{x^2y^2}$$
$$=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{(x\cos(y)+\cos(x))xy-x(x\sin(y)+y\cos(x))}{x^2y^2}=\frac{\cos y}{y}-\frac{\sin y}{y^2},$$

d'où

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy\neq 0,\ \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\cos y}{y}-\frac{\sin y}{y^2} \end{cases}$$

En considérant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ comme des fonctions de deux variables, on peut encore les dériver et on remarque que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x+\cos(xy)-xy\sin(xy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y).$$

De même, avec g on remarque que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy\neq 0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y).$$

En fait, ceci est un fait général : sous une hypothèse technique, toute fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

C'est ce qu'on appelle le théorème de Schwarz.

Exercice 9.
1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable et posons

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(xy) \end{array}$$

Comme f est dérivable, on peut calculer les dérivées partielles de g :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=yf'(xy)\ \text{ et }\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xf'(xy).$$

2. On remarque qu'on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=xyf'(xy)=y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

De plus, la relation $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ valable pour tous $\lambda, x \in \mathbb{R}$ implique que l'on peut recalculer les dérivées partielles de g :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = f(xy) = x^2 f(y)$$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xf(y).$$

De même, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 f'(y).$$

Or, la relation trouvée plus haut $x\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial y}$ entraîne alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 f(y) = x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 y f'(y).$$

En évaluant cette relation en $x = 1$, il vient finalement

$$\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(y) = yf'(y),$$

comme souhaité. On a maintenant deux méthodes pour finir l'exercice :

* On peut anticiper sur le TD d'équations différentielles et résoudre l'équation

  $$xf' - 2f = 0.$$

  Résolvons-la sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après le cours sur les équations différentielles, les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_-^*$ s'écrivent $f : x \mapsto k_1 e^{2\ln x} = k_1 x^2$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de cette équation sont données par $f : x \mapsto k_2 e^{2\ln x} = k_2 x^2$. Comme on veut que f soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation et soit continue, on doit avoir $k_1 = k_2$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xf' - 2f = 0$ sont données par

  $$f : x \mapsto kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

  Finalement, les seules fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

  $$\forall \lambda, x \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$

  sont les fonctions

  $$f : x \mapsto kx^2,$$

  avec $k \in \mathbb{R}$ un réel quelconque.

* Une autre méthode, beaucoup plus simple, consiste à évaluer la relation $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ en $x = 1$ pour obtenir

  $$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = f(\lambda \times 1) = \lambda^2 f(1).$$

  Ainsi, en posant $k := f(1)$, on obtient que les seules fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ s'écrivent nécessairement

  $$f : x \mapsto kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$