# Correction feuille 3

† *Bijections, bijections réciproques*

**Exercice 1.**

1. Soit $x \in [0,1]$ et soit $y = f_1(x) = 1 - x$. Alors, on a $x = 1 - y$, d'où
$$\forall x, y \in [0,1],\ y = 1 - x \ \Leftrightarrow\ x = 1 - y.$$
Ainsi, $f_1$ est bijective et on a
$$f_1^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ y & \longmapsto & 1 - y \end{array}$$
($f_1$ est sa propre réciproque, comme la fonction $f : x \mapsto -x$, on dit que $f_1$ est une ***involution*** de $[0,1]$ dans $[0,1]$)

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ et soit $y = f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a
$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{x-1} &\Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow\ yx - y = x + 1 \\ &\Leftrightarrow\ yx - x = 1 + y \\ &\Leftrightarrow\ x(y-1) = y+1 \\ &\Leftrightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$
(On peut diviser par $y - 1$ car $y \neq 1$ par hypothèse).
Ainsi, on a
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ y = \frac{x+1}{x-1} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1}.$$
On en déduit que $f_2$ est bijective et que sa bijection réciproque est donnée par
$$f_2^{-1} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y & \longmapsto & \frac{y+1}{y-1} \end{array}$$
Là encore, on a $f_2^{-1} = f_2$ et $f_2$ est donc une involution.
*Pour montrer que $f_1$ et $f_2$ sont des involutions, il aurait suffit de montrer que $f_1 \circ f_1 = Id_{[0,1]}$ et que $f_2 \circ f_2 = Id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$. Pourquoi ?*

3. On a
$$f_3(-1) = 0 = f_3(1),$$
donc $f_3$ n'est pas injective, elle n'est donc *a fortiori* pas bijective.

4. La différence entre $f_3$ et $f_4$ est que ces fonctions n'ont pas le même domaine, c'est ça qui va faire que $f_4$ sera bijective, contrairement à $f_3$.
La fonction $f_4$ est dérivable sur $[0,1]$, et on a
$$\forall x \in [0,1],\ f_4'(x) = -2x < 0,$$
donc $f_4$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc est injective et comme $f_4(0) = 1$ et $f_4(1) = 0$, son image est $[0,1]$, donc elle est aussi surjective, donc elle est bijective. Calculons sa réciproque. Si $x \in [0,1]$ et

$y = f_4(x) = 1 - x^2$, alors on a $x = \pm\sqrt{1-y}$ et comme $x$ doit être positif, on doit avoir $x = \sqrt{1-y}$ et dans ce cas, $x \in [0,1]$. On a donc

$$\forall x, y \in [0,1],\ y = 1 - x^2 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt{1-y}.$$

Ainsi, $f_4$ est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$\begin{array}{rcccc} f_4^{-1} & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & y & \mapsto & \sqrt{1-y} \end{array}$$

**Exercice 2.**

1. La fonction sh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a vu que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0.$$

Ainsi, la fonction sh est strictement croissante, donc injective et comme on a

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty,$$

elle est aussi surjective. Ainsi, la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective et surjective : elle est bijective.

2. D'après le cours, comme la fonction $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ ne s'annule jamais, la réciproque argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, en dérivant la relation $\mathrm{sh} \circ \mathrm{argsh} = id_{\mathbb{R}}$, on obtient $\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}) \times \mathrm{argsh}' = 1$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}.$$

Or, on a la relation

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(z)^2 - \mathrm{sh}(z)^2 = 1,$$

d'où, avec $z = \mathrm{argsh}(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))^2 - x^2 = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{x^2+1} \ \ (\text{car ch} > 0)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{argsh}'(x) > 0$, donc la fonction argsh est strictement croissante et comme sh est impaire, il en va de même pour argsh. De plus, comme $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$, on a

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\mathrm{argsh}(y)}{y} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

On a donc une branche parabolique de direction $O_x$ en $+\infty$. De même, on a une branche parabolique de direction $O_x$ en $-\infty$. Par ailleurs, on a $\mathrm{argsh}(0) = 0$ et $\mathrm{argsh}'(0) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(0))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(0)} = 1$ et donc l'équation de la tangente en 0 est $T_0 : y = x$. On en déduit l'allure du graphe de argsh :

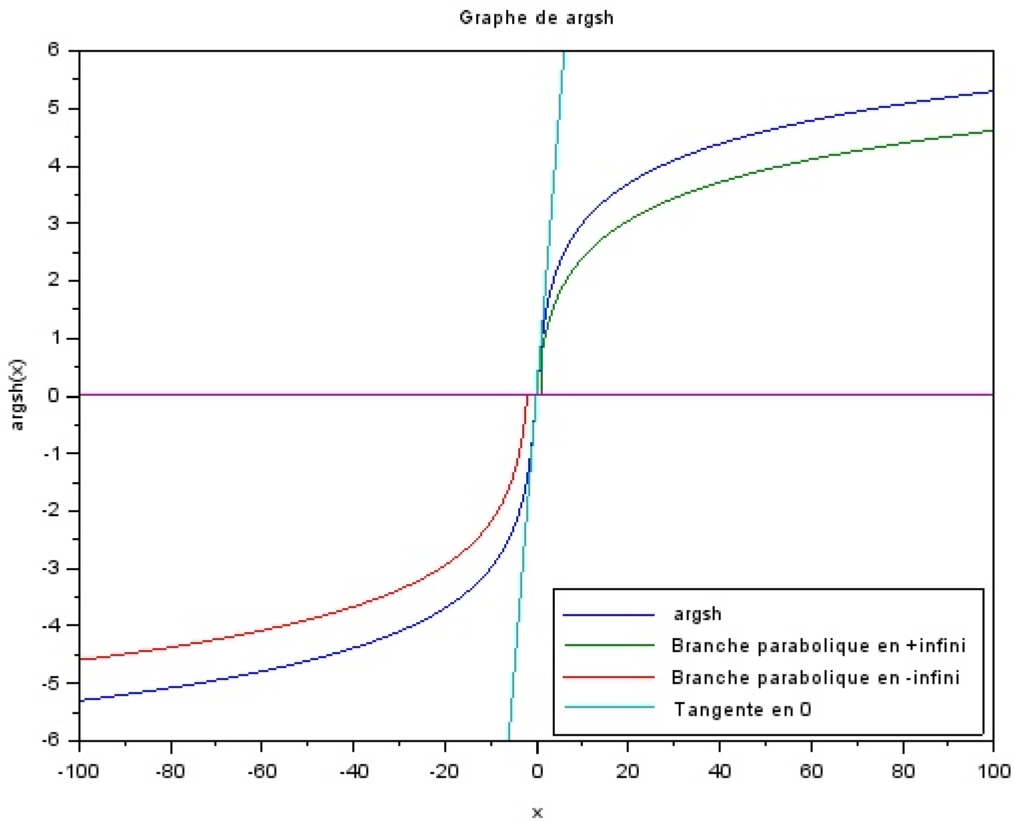


FIGURE 1 – Allure du graphe de argsh

**Exercice 3.**
1. On a
$$\mathrm{ch}(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} = \mathrm{ch}(-1).$$
La fonction ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est donc pas injective, donc n'est pas bijective.
*En fait, aucune fonction paire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne peut être injective pour la même raison !*

2.On a
$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) > 0,$$
donc la fonction ch : $]0, +\infty[ \to ]1, +\infty[$ est strictement croissante, donc injective et comme $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{ch}(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, la fonction ch :$]0, +\infty[ \to ]1, +\infty[$ est bijective et comme $\mathrm{ch}(0) = 1$, il en est de même de la fonction ch : $[0, +\infty[ \to [1, +\infty[$.

3. Comme on a
$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) > 0 \ \text{ et } \ \mathrm{sh}(0) = 0,$$
la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a, en dérivant la relation $\mathrm{ch} \circ \mathrm{argch} = id_{]1,+\infty[}$,
$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}.$$
La relation $\mathrm{ch}(z)^2 - \mathrm{sh}(z)^2 = 1$, valable pour tout réel $z$, entraîne en posant $z = \mathrm{argch}(x)$ :
$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ x^2 - \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = x^2 - 1$$

et, comme $\operatorname{argch}(x) > 0$ pour $x > 1$, on en tire que

$$\forall x > 1,\ \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

et donc

$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

† *Fonctions circulaires réciproques*

**Exercice 4.**

- Attention ! On doit avoir $\arcsin(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, comme $\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3 \times (2\pi) + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on a

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

- Ici, comme $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$, on a directement

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

- On a encore directement

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

- Là, c'est un petit peu plus subtile. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a

$$x = \tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))},$$

  d'où, pour $x \neq 0$, la formule $\sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x))$. Cette formule est encore valable pour $x = 0$ et on obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x)).$$

  D'autre part, on a toujours $\cos(\arctan(x))^2 + \sin(\arctan(x))^2 = 1$ et en remplaçant $\sin(\arctan(x))$ par $x\cos(\arctan(x))$ dans cette identité, il vient

$$\cos(\arctan(x))^2 + x^2\cos(\arctan(x))^2 = 1,$$

  soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

  Or, puisque $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout réel $x$, on a $\cos(\arctan(x)) > 0$ pour tout $x$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que l'expression $\tan(\arccos(x))$ ait un sens, il faut que $x \in [-1, 1]$ et $x \neq 0$. On obtient

$$\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1],\ \tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \frac{\sin(\arccos(x))}{x}.$$

  De plus, on a

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\},\ \sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1 \ \Rightarrow\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

  et donc

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\},\ \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$

**Exercice 5.**

1. Comme la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est une bijection, de réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\tan x = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ \arctan(\tan(x)) = \arctan(\sqrt{3}) \ \Rightarrow\ x = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

ceci est vrai pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ et comme $\tan(a+\pi) = \tan(a)$ pour tout $a$ en lequel tan est définie, les solutions réelles de l'équation sont

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. C'est difficile ! Bravo à vous si vous y êtes arrivé !
Rappelons tout d'abord les relations de trigonométrie (à connaître par cœur !) :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{cases}$$

En général, les autres formules de trigonométrie s'en déduisent. En particulier si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors on a $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$ et $\cos(a+b) \neq 0$ et on peut écrire

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(b)(\sin(a) + \tan(b)\cos(a))}{\cos(b)(\cos(a) - \tan(b)\sin(a))}$$

$$= \frac{\sin(a) + \tan(b)\cos(a)}{\cos(a) - \tan(b)\sin(a)} = \frac{\cos(a)(\tan(a) + \tan(b))}{\cos(a)(1 - \tan(a)\tan(b))} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Ainsi, on a obtenu

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ ;\ a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Revenons maintenant à l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$. En passant à la tangente, on obtient

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

et en utilisant la formule montrée juste avant, il vient

$$\frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(x))} = 1$$

ou encore

$$1 = \frac{2x + x}{1 - 2x \times x} = \frac{3x}{1 - 2x^2}.$$

On cherche donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 - 2x^2 = 3x$, i.e. $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 17$ et ses racines sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < -\frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (en fait, on a $x_1 \approx -1.78$ et $x_2 \approx 0.28$). Or, comme $x_1 < -\frac{\pi}{2}$, on a $\arctan(2x_1) < 0$ et $\arctan(x_1) < 0$. En effet, $\tan(\arctan(x_1)) = x_1 < 0$ et la fonction tan envoie les réels positifs (resp. négatifs) de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur des réels positifs (resp. négatifs). Ainsi, $\arctan(2x_1) + \arctan(x_1)$ est strictement négatif et ne peut donc valoir $\frac{\pi}{4}$. Finalement, si l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une solution, alors elle est unique et donnée par

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}.$$

Il reste à montrer que $x_2$ est solution. Il suffit pour cela de montrer que l'équation admet au-moins une solution, car on saura alors que ça ne peut être que $x_2$ et on aura gagné ! La fonction $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2}$ qui est strictement positive. Donc la fonction $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$ est strictement croissante, vaut $\arctan(2) + \arctan(1) - \frac{\pi}{4} = \arctan(2) > 0$ en 1 et $\arctan(0) + \arctan(0) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} < 0$ en 0, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in ]0,1[$ tel que $\arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4} = 0$. Ce $x$ ne peut alors être que $x_2$.
En faisant les comptes, on obtient au final que l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \in ]0,1[.$$

**Exercice 6.**
1. Ceci découle de la formule démontrée dans l'exercice précédent :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ x, y, x+y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.$$

Soient donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x, y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\tan(x) = a$ et $\tan(y) = b$ et ce car $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est une bijection. De plus, comme $ab < 1$, on a $\tan(x)\tan(y) < 1$ et donc $x+y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ car la formule $\tan(x+y)(1-\tan(x)\tan(y)) = \tan(x)+\tan(y)$ implique que $\tan(x+y)$ est un réel bien défini et on peut donc appliquer la formule pour obtenir

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

En passant à l'arctangente, il vient alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = x + y = \arctan(\tan(x+y)) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right),$$

d'où le résultat.

2. On va bien-sûr utiliser le théorème fondamental de l'exercice de Mathématiques et appliquer la formule ci-dessus !

$$\begin{aligned}
2\arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{4} &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{13}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{13}\frac{1}{13}}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{\frac{2}{13}}{1-\frac{1}{169}}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{2}{13}\frac{169}{168}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{1}{2}\frac{16}{15}\right)\\
&= \arctan\frac{26}{168} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{8}{15}\\
&= \arctan\frac{13}{84} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{8}{15}\\
&= \arctan\left(\frac{\frac{13}{84}+\frac{1}{7}}{1-\frac{13}{84}\frac{1}{7}}\right) + \arctan\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \arctan\left(\frac{\frac{25}{84}}{1-\frac{13}{588}}\right) + \arctan\frac{8}{15} \\
&= \arctan\left(\frac{25}{84}\frac{588}{575}\right) + \arctan\frac{8}{15} \\
&= \arctan\left(7\times\frac{25}{575}\right) + \arctan\frac{8}{15} \\
&= \arctan\frac{7}{23} + \arctan\frac{8}{15} \\
&= \arctan\left(\frac{\frac{7}{23}+\frac{8}{15}}{1-\frac{7}{23}\frac{8}{15}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\frac{289}{345}}{1-\frac{56}{345}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{289}{345}\frac{345}{289}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

† *Pratique du calcul de dérivée*

**Exercice 7.**

- La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{\arctan(x)}$ est définie et continue dès que $\arctan(x) \geq 0$ et est dérivable dès que $\arctan(x) > 0$. On en déduit que
$$D_{f_1} = DC(f_1) = [0, +\infty[$$
et
$$D_{f'} = ]0, +\infty[.$$
De plus, la formule de dérivation des fonctions composées donne
$$\forall x > 0,\ f_1'(x) = \frac{\arctan'(x)}{2\sqrt{\arctan(x)}} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{\arctan(x)}}.$$
- La fonction $f_2 : x \mapsto \arctan(\ln(x))$ est définie, continue et dérivable dès que ln l'est, i.e.
$$D_{f_2} = DC(f_2) = D_{f_2'} = ]0, +\infty[.$$
Là aussi, c'est la formule de dérivation des fonctions composées qui nous donne
$$\forall x > 0,\ f_2'(x) = \frac{\ln'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}.$$
- La fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie, continue est dérivable dès que ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ le sont, i.e.
$$D_{f_3} = DC(f_3) = D_{f_3'} = ]0, +\infty[.$$
De plus, par la formule de dérivation d'un quotient, on obtient
$$\forall x > 0,\ f_3'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$
- La fonction $f_4 : x \mapsto (\sin x)(\arcsin x)$ est définie, continue et dérivable dès que arcsin l'est, d'où
$$D_{f_4} = DC(f_4) = [-1, 1]$$
et
$$D_{f_4'} = ]-1, 1[.$$
De plus, la formule de dérivation d'un produit donne
$$\forall x \in ]-1,1[,\ f_4'(x) = (\cos x)(\arcsin x) + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction $f_5 : x \mapsto \ln(2\arctan(3x))$ est définie, continue et dérivable dès que $\arctan(3x) >$, i.e. dès que $x > 0$ et donc
$$D_{f_5} = DC(f_5) = D_{f_5'} = ]0, +\infty[.$$
Ensuite, par le formule de dérivation des fonctions composée, on obtient
$$\forall x > 0,\ f_5'(x) = \frac{\frac{2\times 3}{(3x)^2+1}}{2\arctan(3x)} = \frac{3}{(9x^2+1)(\arctan(3x))}.$$
- Enfin, la fonction $f_6 : x \mapsto \sin^2(\arccos(x^2))$ est définie, continue et dérivable dès que $x \mapsto \arccos(x^2)$ l'est, d'où
$$D_{f_6} = DC(f_6) = [-1, 1]$$
et
$$D_{f_6'} = ]-1, 1[.$$
De plus, on a
$$\forall x \in D_{f_6} = [-1, 1],\ f_6(x) = \sin(\arccos(x^2))^2 = (\sqrt{1-(x^2)^2})^2 = 1 - x^4,$$
d'où
$$\forall x \in D_{f_6'} = ]-1, 1[,\ f_6'(x) = -4x^3.$$

**Exercice 8.**
1. a) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{argsh}(x) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est définie, continue et dérivable dès que $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ l'est, i.e. dès que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, ce qui est toujours le cas. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, alors il est clair que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Si $x < 0$, alors on a $x^2 < x^2 + 1$ donc $-x = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ et donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Enfin, si $x = 0$, on a $x + \sqrt{x^2+1} = 1 > 0$, donc dans tous les cas, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et donc
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$
b) Calculons $f'$. On a, par dérivation des fonctions composées
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \operatorname{argsh}'(x) - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh}'(x) - \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(\sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}$$
$$= \operatorname{argsh}'(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
Or, on a vu dans l'exercice XII que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
et on en déduit donc que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0.$$
Ceci implique que $f$ est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut $f(0)$. Or, on a $f(0) = \operatorname{argsh}(0) + \ln 1 = 0$, donc $f$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$
On a donc trouvé une expression explicite de $\operatorname{argsh}(x)$, pour tout réel $x$.
2. On va suivre le même schéma de preuve. Posons $g : x \mapsto \operatorname{argch}(x) - \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. La fonction $g$ est définie, continue et dérivable dès que argch et $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ le sont, i.e. dès que $x > 1$ et on obtient donc
$$D_g = DC(g) = D_{g'} = ]1, +\infty[.$$
Ensuite, on calcule
$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ g'(x) = \operatorname{argch}'(x) - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch}'(x) - \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{(\sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \operatorname{argch}'(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Là aussi, on a vu que

$$\forall x > 1,\ \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

et donc

$$\forall x > 1,\ g'(x) = 0,$$

ce qui implique que $g$ est constante, égale à $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \operatorname{argch}(1) - \ln 1 = 0$, donc $g$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\forall x \in ]1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

*En fait, on aurait pu trouver ces expressions directement sans utiliser la dérivation ; en inversant les équations* $y = \operatorname{sh}(x)$ *et* $y = \operatorname{ch}(x)$*. Pouvez-vous trouver comment ?*

† *Applications*

**Exercice 9.** Ici il est surtout question de bien lire l'énoncé pour modéliser la situation. Ici toutes les quantités de médicament sont exprimées en milligrammes, et les durées en heures. La question posée est de savoir sous quelle condition on a $A(t) \geqslant 40$ (i.e la quantité de médicament dans le sang est supérieure à 40 mg). On résout donc (en sachant que $D$ et $k_e$ sont positifs)

$$\begin{aligned} A(t) = De^{-k_e t} \geqslant 40 \Leftrightarrow e^{-k_e t} &\geqslant \frac{40}{D} \\ &\Leftrightarrow -k_e t \geqslant \ln\left(\frac{40}{D}\right) \\ &\Leftrightarrow t \leqslant \frac{-1}{k_e} \ln\left(\frac{40}{D}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant $D$ et $k_e$ par leurs valeurs, on obtient que

$$A(t) \geqslant 40 \Leftrightarrow t \leqslant t_0 \frac{-10}{3} \ln\left(\frac{4}{25}\right) \approx 6.11$$

Il faut donc renouveler l'injection au bout de $t_0$ heures (environ 6 heures et 7 minutes).

**Exercice 10.** De toute façon, on a

$$I = 10\log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right) = 10\log_{10}\left(10^{12}J\right) = 10\log_{10}(J) + 10\log_{10}(10^{12}) = 10\log_{10}(J) + 120$$

1. On a

$$\begin{aligned} I > 120 &\Leftrightarrow 10\log_{10}(J) > 0 \\ &\Leftrightarrow \log_{10}(J) > 0 \\ &\Leftrightarrow J > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{Q}{4\pi} > R^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{Q}{4\pi}} > R \end{aligned}$$

Car $R$ et $Q$ sont positifs. Dans le cas où $Q = 200W$, on obtient

$$I > 120 \Leftrightarrow R < R_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3.99$$

Le seuil de la douleur est dépassé si la distance entre le haut-parleur et l'auditeur est inférieure à $R_0$ (environ 4 mètres).
De même, on a

$$\begin{aligned} I > 20 &\Leftrightarrow 10log_{10}(J) > -100 \\ &\Leftrightarrow \log_{10}(J) > -10 \\ &\Leftrightarrow J > 10^{-10} \\ &\Leftrightarrow 10^{10}J > 1 \\ &\Leftrightarrow 10^{10}\frac{Q}{4\pi} > R^2 \\ &\Leftrightarrow 10^5\sqrt{\frac{Q}{4\pi}} > R \end{aligned}$$

En remplaçant $Q$ par 200, on trouve $R < 10^5\sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 398942$ mètres, soit environ 400km.

2. On suppose ici $R = 2$, on a alors

$$I > 120 \Leftrightarrow Q > 4\pi R^2 = 16\pi \approx 50,27$$

La puissance nécessaire pour atteindre le seuil de douleur est alors d'environ 50,16 watts.