Correction feuille 2

† *Théorème de Rolle, accroissements finis, variations*

Exercice 1.
1.Soient $x, t \in \mathbb{R}$. Supposons $t > 0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in]x, x+t[$ tel que

$$f(x+t) - f(x) = (x+t-x)f'(c_1) = tf'(c_1)$$

d'où

$$|f(x+t) - f(x)| = |f'(c_1)||t| \leqslant a|t|.$$

Supposons maintenant $t < 0$. Toujours par le théorème des accroissements finis, il existe $c_2 \in]x+t, x[$ tel que

$$f(x) - f(x+t) = tf'(c_2),$$

d'où

$$|f(x+t) - f(x)| = |f'(c_2)||t| \leqslant a|t|.$$

Enfin, si $t = 0$ le résultat est évident. Dans tous les cas, on obtient

$$\forall x, t \in \mathbb{R},\ |f(x+t) - f(x)| \leqslant a|t|.$$

2. On cherche à étudier la quantité $\left|\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{10}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right|$. On va bien-sûr utiliser la question précédente. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

(de façon générale, si $\alpha \notin \{0, -1\}$, la formule pour la dérivée de x^α est $\alpha x^{\alpha-1}$).
Pour appliquer la question précédente, on cherche à majorer $|f'(x)|$ (au moins sur l'intervalle d'étude). La fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ est décroissante sur $[99, +\infty[$, donc

$$\forall x \geqslant 99,\ |f'(x)| \leqslant |f'(99)| = \frac{1}{2\sqrt{99^3}}$$

par la question précédente, on obtient donc

$$\left|\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{99+1}}\right| \leqslant 1 \times \frac{1}{2\sqrt{99^3}}$$

Remarque 1. Bien-sûr cette borne n'a pas grand intérêt : on approxime $\frac{1}{\sqrt{99}}$, et pour calculer l'erreur, on devrait calculer $\frac{1}{2\sqrt{99^3}}$, ce qui est encore plus compliqué...
Par contre, quitte à détériorer notre borne, on peut obtenir quelque chose de plus calculable :

$$\frac{1}{2\sqrt{99^3}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{81^3}} = \frac{1}{2\sqrt{9^6}} = \frac{1}{2 \times 9^3} = \frac{1}{2 \times 729} = \frac{1}{1458}$$

Dans les deux cas, on a (via calculette, pour savoir si ces estimations sont proches de la réalité)

$$\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{100} \approx 5,03.10^{-4} \qquad \frac{1}{2\sqrt{99^3}} 5,07.10^{-4} \qquad \frac{1}{1458} = 6,85.10^{-4}$$

Exercice 2.

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Cette fonction est définie dés que $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$, et dérivable dès que $x^2 - 2x - 3 > 0$. On calcule donc le signe de $x^2 - 2x - 3$, on a

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Comme le coefficient directeur de $x^2 - 2x - 3$ est positif, on trouve que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$ et est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.
On calcule ensuite la dérivée de f, la formule est $\sqrt{u(x)}$, dont la dérivée est $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, qui ici donne

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

Pour calculer les variations de f, on calcule le signe de f' : comme le dénominateur est de signe constant (une racine est toujours positive), le signe de f' est le signe de $x - 1$, d'où le tableau de signes/variation suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$\searrow$			$\nearrow$

Ainsi, f n'est pas dérivable en $a = -1$, donc la tangente cherchée n'existe pas (en fait géométriquement, la tangente existe et est verticale, son équation est $x = -1$, mais on ne peut pas le calculer par la dérivée).
En $a = 4$, l'équation de la tangente est donnée par

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

Donc $f'(4) = \frac{3}{\sqrt{16-8-3}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, et $f(4) = \sqrt{5}$, l'équation de la tangente à f en 4 est

$$T_4 f : y = \frac{3}{\sqrt{5}}(x-4) + \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}x - \frac{7}{\sqrt{5}}$$

2. La fonction g est définie par un quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x) = 3x^2 + x - 1$ et $v(x) = \sqrt{x+1}$.
La fonction g est définie dés que $u(x)$ est définie, et que $v(x)$ est définie non nulle. On obtient ici

$$D_g =]-1, +\infty[$$

et comme les fonctions $u(x)$, $v(x)$ sont dérivables sur ce domaine, (et $v(x)$ non nulle), on obtient que g est dérivable sur D_g.
Pour calculer $g'(x)$, on utilise la formule

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Ici, on a $u'(x) = 6x+1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, d'où

$$\begin{aligned}
\forall x > -1,\ g'(x) &= \frac{(6x+1)\sqrt{x+1} - \frac{3x^2+x-1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\
&= \frac{2(6x+1)(x+1) - (3x^2+x-1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{12x^2+2x+12x+2-3x^2-x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{9x^2+13x+3}{2(x+1)\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Pour connaître les variations de la fonction g, il faut connaître le signe de la fonction g', et comme il s'agit d'un quotient, on calcule le signe du numérateur et du dénominateur.

- Signe de $9x^2+13x+3$: on calcule $\Delta = 13^2 - 118 = 61$, $x_1 = \frac{-13-\sqrt{61}}{18}$ et $x_2 = \frac{-13+\sqrt{61}}{18}$, on a $x_1 < -1$ et $x_2 > -1$. La fonction $x \mapsto 9x^2+13x+3$ est donc négative sur $]-1, x_2]$ et positive sur $[x_2, + \in^f ty[$.
- La fonction $x \mapsto 2(x+1)\sqrt{x+1}$ est évidemment positive sur $]-1, +\infty[$, la fonction g' a en fait le signe de $9x^2+13x+3$.

On a donc le tableau de signes/variations suivant :

x	-1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Enfin, pour la tangente en $a = 0$, on a

$$g(a) = g(0) = -1 \quad \text{et} \quad g'(a) = g'(0) = \frac{3}{2}.$$

L'équation de la tangente à la courbe de g en a est alors donnée par

$$T : g'(a)(x-a) + g(a) = \frac{3}{2}x - 1$$

† *Fonctions polynômes et fractions rationnelles*

Exercice 3.

1. La fonction polynômiale

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x^3+x+3 \end{array}$$

est de degré 3 et son coefficient de degré 0 (respectivement 1, 2, 3) vaut 3 (respectivement 1, 0, 2).

2. En tant que fonction polynômiale, f est partout définie, continue et dérivable :

$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$

3. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^2+1,$$

c'est encore une fonction polynômiale de degré 2, soit le degré de f moins un.

4. De façon générale, supposons qu'on ait une fonction polynômiale

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

de degré n (i.e. $a_n \neq 0$). On calcule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 = \sum_{i=2}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

On constate alors que P' est de degré $n-1$. Ainsi, pour toute fonction polynômiale Q, on a la formule

$$\deg Q' = \deg Q - 1.$$

Exercice 4.

1. La fonction $f : x \mapsto 3x^4 + 2x^2 - 4$ est polynômiale, donc est partout définie, continue et dérivable :

$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}$$

et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 12x^3 + 4x.$$

2. La fonction $g : x \mapsto \frac{x^3+3x-1}{x^2-5x+6}$ est définie dès que $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1$ et ses racines valent 2 et 3. Ainsi, g est définie sur

$$D_g =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

De plus, elle est continue et dérivable sur D_g en tant que quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, d'où

$$D_g = DC(g) = D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[.$$

En posant $u(x) := x^3 + 3x - 1$ et $v(x) := x^2 - 5x + 6$, la formule de dérivation des quotients donne

$$\forall x \in D_{g'},\ g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(3x^2+3)(x^2-5x+6) - (x^3+3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 3x^2 - 15x + 18 - 2x^4 - 6x^2 + 2x + 5x^3 + 15x - 5}{(x^2-5x+6)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 10x^3 + 15x^2 + 2x + 13}{(x^2-5x+6)^2}.$$

Exercice 5. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + ax^2 + x + 1 \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

1. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est polynômiale, donc est partout définie, continue et dérivable :

$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$

2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1.$$

3.

- Supposons que $a \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$. Dans ce cas, le discriminant de f' vaut $\Delta = 4a^2 - 12 > 0$. Les deux racines réelles de f' sont donc

$$x_1 := \frac{-2a - 2\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{6} = \frac{-a - \sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{3}$$

et

$$x_2 := \frac{-2a + 2\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{6} = \frac{-a + \sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{3}.$$

Comme le coefficient dominant de f' est positif, f' est positive à l'extérieur de ses racines et négative à l'intérieur. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Supposons que $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Dans ce cas on a $\Delta = 4a^2 - 12 < 0$ et f' n'a aucune racine réelle. De plus, f' est toujours strictement positive (car f' a le signe de $f'(0) = 1 > 0$), d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Supposons que $a = -\sqrt{3}$. Dans ce cas on a $\Delta = 4a^2 - 12 = 0$ et la seule racine réelle de f' vaut $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et f' est positive ou nulle. Ainsi, le tableau de variations de f s'écrit

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{9} + 1$	$\nearrow$	$+\infty$

- Supposons enfin que $a = \sqrt{3}$. Dans ce cas on a aussi $\Delta = 4a^2 - 12 = 0$ et la seule racine réelle de f' est $\frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

† *Fonctions logarithmes et exponentielles*

Exercice 6.

1.

- Par définition du logarithme népérien, on a
$$\ln(e^{\pi}) = \pi,$$
- Toujours par définition de ln, on a
$$e^{\ln(\pi)} = \pi.$$
- On calcule
$$e^{\frac{\ln 3}{2}+\ln 5} = e^{\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)} \times e^{\ln 5} = e^{\ln(\sqrt{3})} \times e^{\ln 5} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}.$$
- On a directement
$$\frac{1}{3}\ln(e^{\pi+2}) = \frac{1}{3} \times (\pi+2) = \frac{\pi+2}{3}.$$

2.

- On passe à l'exponentielle (on a le droit, car exp est partout définie !) et on obtient
$$2\ln x + \ln 6 = 0 \;\Rightarrow\; e^{2\ln x+\ln 6} = 1 \;\Rightarrow\; e^{\ln(6x^2)} = 1 \;\Rightarrow\; 6x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$
et, comme ln n'est défini que pour les réels strictement positifs, la seule solution possible est $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Réciproquement, on a
$$2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \ln 6 = \ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln 6 = -\ln 6 + \ln 6 = 0$$
et donc l'équation $2\ln x + \ln 6 = 0$ admet une unique solution donnée par
$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

*Ce type de raisonnement est très utilisé en Mathématiques et s'appelle l'**analyse-synthèse**. On suppose que l'on a une solution à notre problème et on en déduit certaines de ses propriétés ; c'est l'**analyse**. Quand on a assez avancé pour trouver une solution, on prend ce candidat et on vérifie qu'il répond à la question ; c'est la **synthèse**. Dans le cas où l'on aboutirait à une contradiction, cela veut dire qu'il n'existe pas de solution au problème posé.*

- On raisonne encore ici par analyse-synthèse. En passant encore à l'exponentielle, on a (pour une éventuelle solution x)
$$\ln(x) + \ln(x+1) = 1 \;\Rightarrow\; \ln(x(x+1)) = 1 \;\Rightarrow\; x(x+1) = e \;\Rightarrow\; x^2 + x - e = 0.$$
Le discriminant de ce dernier polynôme vaut $\Delta = 1 + 4e$ et la seule racine positive de ce polynôme est $x = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$. La seule solution possible est donc $x = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$. Réciproquement, on calcule
$$\ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\right) + \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \times \frac{1+\sqrt{1+4e}}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+4e-1}{4}\right) = \ln(e) = 1,$$

donc l'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = 1$ admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\sqrt{1+4e}-1}{2}.$$

3.

- On raisonne toujours par analyse-synthèse. Si x est solution de l'inéquation, alors

$$\ln(3x) > \ln(x^2-1) \;\Rightarrow\; 3x > x^2 - 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 1 < 0.$$

Ce dernier trinôme est de discriminant $\Delta = 13$ et ses racines sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ainsi, pour que $x^2-3x-1 < 0$, il faut et il suffit que $x \in \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. Or, pour que $\ln(3x)$ et $\ln(x^2-1)$ aient un sens, il faut que $x > 0$ et $|x| > 1$; il faut donc que $x > 1$. Ainsi, il faut que $x \in \left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. Réciproquement, si $x \in \left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$, on vérifie que l'on a bien $\ln(3x) > \ln(x^2-1)$ et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est

$$\left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right].$$

- On a

$$e^{3x} \geq e^{x^2-x-2} \;\Rightarrow\; 3x \geq x^2 - x - 2 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 2 \leq 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 24$ et ses racines réelles valent $x_1 = \frac{4-2\sqrt{6}}{2} = 2-\sqrt{6}$ et $x_2 = \frac{4+2\sqrt{6}}{2} = 2+\sqrt{6}$. Ici, la définition des deux membres de l'inéquation ne pose problème en aucun réel et on vérifie que si $2-\sqrt{6} \leq x \leq 2+\sqrt{6}$, alors on a bien $e^{3x} \geq e^{x^2-x-2}$ et donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$[2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}].$$

Exercice 7.

1. On a $x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - x > 0$, on calcule donc le signe de ce polynôme, ses racines sont 0 et 1, il est donc strictement positif pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. La deuxième inégalité n'a de sens que dans les cas où x est positif, auquel cas la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante, on a donc $\sqrt{x} < x \Rightarrow x < x^2$, équation dont on connaît déjà les solutions, les solutions de cette deuxième inégalité sont donc $\mathbb{R}_+ \cap]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[=]1, +\infty[$.
2. Soient $0 < a < b$ deux réels fixés.

- Supposons que $x \in]0, 1[$. Alors on a $\ln(x) < 0$ et alors, comme a et b sont positifs :

$$b \ln x < a \ln x$$

et, par croissance de l'exponentielle, on obtient

$$x^b = e^{b \ln x} < e^{a \ln x} = x^a.$$

- Supposons que $x \in]1, +\infty[$. Alors $\ln(x) > 0$ et, comme a et b sont positifs :

$$a \ln x < b \ln x$$

et, par croissance de l'exponentielle,

$$x^a = e^{a \ln x} < e^{b \ln x} = x^b,$$

d'où le résultat.

Exercice 8. 1. Remarquons tout d'abord que cette équation a un sens quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En la multipliant par $3^x = e^{x\ln 3}$, on obtient

$$3^x + 3^{-x} = 2 \;\Rightarrow\; 3^{2x} - 2 \times 3^x + 1 = 0.$$

Posons alors $X := 3^x$. On doit avoir $X^2 - 2X + 1 = 0$ et comme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, on doit donc avoir $X = 1$, soit $3^x = 1$, soit $e^{x\ln 3} = e^0$, soit $x \ln 3 = 0$, donc $x = 0$. Réciproquement, $x = 0$ vérifie clairement $3^x + 3^{-x} = 2$, donc cette équation admet pour unique solution

$$x = 0.$$

2. L'équation $3^{2x} - 2.3^x + 1 = 0$ vient d'être résolue et sa seule solution est

$$x = 0.$$

3. Ici, on a deux façons (quasiment identiques !) de résoudre le problème. On peut utiliser la définition de $\log_x$ ou bien utiliser la formule utile

$$\forall a > 0,\ \forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Par définition de $\log_x$, on a

$$\log_x(2) = -3 \;\Rightarrow\; x^{-3} = 2 \;\Rightarrow\; x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Autrement,

$$\log_x(2) = -3 \;\Rightarrow\; \frac{\ln 2}{\ln x} = -3 \;\Rightarrow\; \ln x = -\frac{\ln 2}{3} = \ln\left(2^{-\frac{1}{3}}\right) \;\Rightarrow\; x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Réciproquement, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ vérifie bien l'équation, qui admet donc pour unique solution

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

4. On a

$$2^{\ln x} = 8 \;\Rightarrow\; \ln x = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3 \;\Rightarrow\; x = e^3$$

et e^3 vérifie clairement l'équation, qui admet donc pour unique solution

$$x = e^3.$$

Exercice 9.
1. On écrit

$$\log_3\left(\sqrt[5]{27}\right) = \log_3\left(27^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\log_3(27) = \frac{1}{5}\log_3(3^3) = \frac{3}{5}$$

d'o'ù $\log_3(\sqrt[5]{27}) = \frac{3}{5}$.
2. On écrit

$$\begin{aligned} 2\log_5(4) - \frac{1}{2}\log_5(64) - \log_5(2) &= \log_5(4^2) - \log_5(\sqrt{64}) - \log_5(2) \\ &= \log_5(16) - \log_5(8) - \log_5(2) \\ &= \log_5\left(\frac{16/8}{2}\right) = \log_5(1) = 0 \end{aligned}$$

d'où $2\log_5(4) - \frac{1}{2}\log_5(64) - \log_5(2) = 0.$

† *Fonctions hyperboliques*

Exercice 10.
1. Les fonctions Pf et If sont définies via les fonctions $f : x \mapsto f(x)$ et $\widetilde{f} : x \mapsto f(-x)$, il faut et il suffit que ces deux fonctions soient définies pour que Pf et If le soient, donc

$$D_{Pf} = D_{If} = D_f \cap D_{\widetilde{f}} = D_f \cap -D_f$$

qui est bien un domaine symétrique. La parité/imparité de Pf et If sont évidentes :

$$Pf(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = Pf(x)$$

$$If(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -If(x)$$

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en va de même de $\widetilde{f} : x \mapsto f(-x)$, donc Pf et If sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme (et multiplication par un nombre réel) de fonctions dérivables. Comme on a $\widetilde{f}' : x \mapsto -f'(-x)$, on a

$$(Pf)'(x) = \frac{f'(x) - f'(-x)}{2} = I(f') \quad \text{et} \quad (If)' = \frac{f'(x) + f'(-x)}{2} = P(f')$$

3. Dans le cas où $f(x) = e^x$, on a

$$Pf(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \quad \text{et} \quad If(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

La question précédente nous donne alors les formules $\mathrm{ch}' = sh$ et $\mathrm{sh}' = ch$.

Exercice 11. Ce sont des calculs rébarbatifs, mais sans grande astuce :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) &= 2\frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x) \end{aligned}$$

(on utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} + e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + e^{2x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x) \end{aligned}$$

Exercice 12.
1. Premièrement, on a

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 3e^x + 3e^{-x}}{2} = \frac{-2e^x + 4e^{-x}}{2} = 2e^{-x} - e^x$$

La dérivée de cette fonction est $x \mapsto -(2e^{-x} + e^x)$ qui est strictement négative sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, comme on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution de l'équation $f(x) = -1$.

2. Par définition de la fonction f, on a

$$2e^{-\alpha} - e^{\alpha} + 1 = 0$$

En multipliant cette équation par e^{α} (qui est non nul !) on obtient

$$2 - e^{2\alpha} + e^{\alpha} = 0$$

qui est l'équation demandée. On pose alors $X = e^{\alpha}$, et l'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$, on calcule

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad X_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad X_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Donc $X = e^{\alpha} \in \{-1, 2\}$, mais comme la fonction exponentielle est strictement positive, la seule solution possible est $e^{\alpha} = 2$ et $\alpha = \ln(2)$. (ceci suffit pour conclure : on a montré que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution, donc notre unique candidat α est forcément solution : il doit y en avoir une !).

3. L'intersection d'une fonction f avec l'axe des abscisses est toujours donnée par les solutions de l'équation $f(x) = 0$, ici $2e^{-\beta} - e^{\beta} = 0$, on applique le même raisonnement qu'à la question précédente : en multipliant par e^{β}, on obtient

$$\begin{aligned} 2 - e^{2\beta} = 0 &\Leftrightarrow 2 = e^{2\beta} \\ &\Leftrightarrow \ln(2) = 2\beta \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{2} = \ln(\sqrt{2}) = \beta \end{aligned}$$

L'intersection de f avec l'axe des abscisses est donnée par $x = \ln(\sqrt{2})$.

Exercice 13.
1. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4e^x e^{-x}}{4} \\ &= e^x e^{-x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

| 2. Par la question précédente, on a $\mathrm{sh}(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - 1$, donc

$$5\mathrm{ch}(x)^2 + 3\mathrm{sh}(x)^2 = 5\mathrm{ch}(x)^2 + 3(\mathrm{ch}(x)^2 - 1) = 8\mathrm{ch}(x)^2 - 3$$

3. On a

$$5\mathrm{ch}(x)^2 + 3\mathrm{sh}(x)^2 = a \Leftrightarrow 8\mathrm{ch}(x)^2 - 3 = a \Leftrightarrow \mathrm{ch}(x)^2 = \frac{a+3}{8}$$

On pose $b = \frac{a+3}{8}$. On sait que si b est négatif, cette équation n'a pas de solutions, on se restreint donc au cas où b est positif, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)^2 = b &\Leftrightarrow \mathrm{ch}(x) = \sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2e^x\sqrt{b} = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = e^x$, et on obtient l'équation $X^2 - 2\sqrt{b}X + 1 = 0$. On calcule $\Delta = 4b - 4 = 4(b-1)$.

- Si $b < 1$, on a $\Delta < 0$ et cette équation n'a pas de solutions.
- Si $b = 1$, on a $\Delta = 0$ et cette équation admet une unique solution $X_0 = \frac{2\sqrt{b}}{2} = 1$.
- Si $b > 1$, on a deux solutions $X_1 = \frac{2\sqrt{b}-2\sqrt{b-1}}{2} = \sqrt{b} - \sqrt{b-1}$ et $X_2 = \sqrt{b} + \sqrt{b-1}$.

On a donc, pour l'équation de départ :

- Si $b < 1$ (autrement dit $a < 5$), il n'y a pas de solutions.
- Si $b = 1$ (autrement dit $a = 5$), il y a une unique solution $x = \ln(X_0) = \ln(1) = 0$.
- Si $b > 1$ (autrement dit $a > 5$), il y a deux solutions $x_1 = \ln(X_1) = \ln(\sqrt{b} - \sqrt{b-1})$ et $x_2 = \ln(X_2) = \ln(\sqrt{b} + \sqrt{b-1})$.