TD 5 - Anneaux, partie 1

Exercice 1. Soit Ω un ensemble. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Pour toute partie X de Ω, on note X^c le complémentaire de X dans Ω. Pour $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit la *différence symétrique* de X et de Y par $X \Delta Y := (X^c \cap Y) \cup (X \cap Y^c)$. Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il unitaire ?

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ des matrices carrées de taille n à coefficients entiers est un anneau non commutatif et déterminer ses éléments inversibles.

Exercice 3. Soit $d \geqslant 1$ un entier naturel. On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] := \left\{ a + i\sqrt{d}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ si et seulement si $|z| = 1$.

Exercice 4. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit que A est un *anneau de Boole* si pour tout $a \in A$, on a $a^2 = a$.

1. Soit Ω un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau de Boole.
   (a) Montrer que $a + a = 0$ pour tout $a \in A$.
   (b) Montrer que A est commutatif.
   (c) Montrer que $A^\times = \{1_A\}$.
   (d) Montrer que A est intègre si et seulement si $\mathrm{Card}(A) = 2$.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.

1. Déterminer $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est un nombre premier.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = n$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $f(x) \geqslant 0$ (*indication : utiliser la racine carrée*).
3. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x$.

Exercice 7. Soit $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et de la multiplication définie par $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\{f \in A \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ est un idéal de A mais que $\{f \in A \mid f'(0) = 0\}$ n'en est pas un.

Exercice 8.
1. Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. Montrer que $I = A$ si et seulement si I contient un élément inversible de A.
2. Montrer que tout anneau commutatif intègre ayant un nombre fini d'idéaux est un corps.

Exercice 9. Soient A un anneau commutatif intègre et $a, b \in A$. Montrer que les idéaux (a) et (b) sont égaux si et seulement s'il existe $u \in A^\times$ tel que $a = ub$.

Exercice 10. Soient A un anneau commutatif et $a, b \in A$. Montrer que a divise b si et seulement si $(b) \subset (a)$.

Exercice 11. Soit A un anneau commutatif intègre. Une *partie multiplicative* de A est une partie de A stable par multiplication, contenant 1_A et ne contenant pas 0_A. On pose

$$A_S := \left\{ \frac{a}{s} \in \mathrm{Frac}(A) \mid a \in A, s \in S \right\}.$$

1. Montrer que A_S est un sous-anneau de $\mathrm{Frac}(A)$.
2. Soit B un anneau, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $f(s) \in B^\times$ pour tout $s \in S$. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\widetilde{f} : A_S \to B$ tel que $\widetilde{f}(\frac{a}{1_A}) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
3. Soit $I \subset A$ un idéal premier de A. Montrer que le complémentaire $S := A \setminus I$ de I dans A est une partie multiplicative.
4. Que vaut $A_{A \setminus \{0_A\}}$?
5. Soient $s \in A \setminus \{0_A\}$ et $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que S est une partie multiplicative de A, puis que $A_S \simeq A[X]/(sX - 1_A)$.

Exercice 12 (Pour avoir les idées claires)**.** Les objets suivants existent. Donnez en au moins un exemple, en justifiant.

1. Un idéal d'un anneau.
2. Deux idéaux d'un anneau dont la réunion n'est pas un idéal.
3. Un anneau non intègre.
4. Un anneau intègre qui n'est pas un corps.
5. Un anneau sur lequel il existe un polynôme non nul ayant une infinité de racines.
6. Un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible, mais qui n'est pas un corps.
7. Un anneau intègre dont un quotient n'est pas intègre.
8. Un anneau sur lequel tout polynôme non constant admet une racine.
9. Un anneau dans lequel l'ensemble des éléments non inversibles n'est pas un idéal.
10. Un anneau dans lequel l'ensemble des éléments non inversibles est un idéal.
11. Un anneau sur lequel il existe des polynômes de degré arbitrairement grand n'ayant aucune racine.
12. Deux entiers $m, n \geqslant 1$ tels que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
13. Deux entiers $m, n \geqslant 1$ tels que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
14. Deux idéaux I et J d'un anneau commutatifs tels que $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$ ne soit pas un idéal.
15. Un idéal premier non maximal d'un anneau.
16. Un idéal maximal d'un anneau.
17. Un idéal non premier d'un anneau intègre.
18. Deux anneaux intègres dont le corps des fractions est $\mathbb{Q}(X)$.
19. Un anneau intègre A et un idéal premier I de A tels que le corps de fractions de A/I ne soit pas isomorphe à un quotient de $\mathrm{Frac}(A)$.